

PROPOZYCJE TEMATÓW NA XXXIV OSM

1. Wybrane twierdzenia geometrii sferycznej.

Definicje prostych, odcinków, łamanych, wielokątów w geometrii sferycznej. Różnice i podobieństwa pomiędzy geometrią euklidesową a geometrią sferyczną. Równoległość prostych, przystawanie trójkątów. Obliczanie obwodu i pola wybranych figur. Twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych w trójkącie.

Literatura:

N. Stiepanow, *Trygonometria sferyczna*, PWN, Warszawa 1960.

S. Kulczycki, *Geometria nieeuklidesowa*, PWN, Warszawa 1960.

2. Powierzchnie stopnia drugiego.

Powierzchnie obrotowe: torus, elipsoida, hiperboloida jednowłokowa i hiperboloida dwuwłokowa, paraboloida eliptyczna i paraboliczna, powierzchnie prostokreślne, powierzchnie walcowe. Podział powierzchni stopnia drugiego. Równania opisujące powierzchnie stopnia drugiego. Własności wybranych powierzchni.

Literatura:

F. Leja, PWN, Warszawa 1977.

3. Przekształcenia geometryczne.

Definicja przekształcenia zbioru punktów. Przekształcenia płaszczyzny: przesunięcie, symetria względem osi x , obrót dookoła punktu, jednokładność. Powinowactwa i podobieństwa. Izometrie. Inwersja. Własności przekształceń oraz związki pomiędzy nimi.

Literatura:

F. Leja, *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1977.

4. Krzywe przestępne.

Definicja krzywych przestępnych. Przykłady krzywych: cykloida, epicykloida, hipocykloida, ewolwenta koła, linia łańcuchowa, spirale: Archimedesowa, hiperboliczna i logarytmiczna. Własności wybranych krzywych. Równania krzywych w postaci parametrycznej, biegunowej i w układzie kartezjańskim.

Literatura:

F. Leja, *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1977.

5. Liczby Catalana.

1. Na ile różnych sposobów można podzielić n -ką wypukły na trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi?
2. Mamy pomnożyć $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$. Możemy to wykonać na przykład w takiej kolejności: $(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)$ lub takiej: $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$ lub takiej $x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)$ lub jeszcze inaczej. Dla czterech liczb łatwo wypisać te i pozostałe sposoby wyboru kolejności mnożeń, a ile takich sposobów jest, gdy mnożymy n czynników?

3. W kolejce do kasy stoi $2n$ osób, połowa z nich ma monetę 5-złotową, a druga połowa banknot 10-złotowy. Bilet kosztuje 5 złotych a początkowo kasa jest pusta. Na ile sposobów można ustawić oczekujących w kolejce, tak aby nikt nie musiał czekać na wydanie reszty?

Te i inne problemy kombinatoryczne prowadzą do liczb Catalana. Przedstaw, jak można je zdefiniować, ile wynoszą (można to obliczyć różnymi sposobami, na przykład z użyciem funkcji tworzących).

Literatura:

M. Mikołajczyk, *Liczby Katalana*, Matematyka, społeczeństwo, nauczanie

<http://www.msn.uph.edu.pl/smp/msn/17/6-15.pdf>

<http://wmii.uwm.edu.pl/~denisjuk/files/MatematykaDyskretna.pdf>

Z Palka, A. Ruciński, *Wykłady z kombinatoryki*, WNT.

6. Zastosowanie teorii grup w zliczaniu obiektów kombinatorycznych.

Wierzchołki kwadratu (pięciokąta foremego, sześciokąta foremego,... sześcianu, ...) malujemy każdy na jeden z dwóch (trzech, czterech, ..., n) dostępnych kolorów. Ile jest różnych pokolorowań? Kwadratem można obracać i można (lub nie) odwracać go na drugą stronę. Dlatego, na przykład, jest tylko jedno takie pokolorowanie, że jeden wierzchołek ma kolor zielony a trzy pozostałe kolor czerwony. Do rozważenia takich zagadnień przydają się pojęcia z algebry, na przykład działanie grupy na zbiorze, indeks cyklowy, orbity, Lemat Burnside'a, Twierdzenie Polya.

Literatura:

Palka, Ruciński, *Wykłady z kombinatoryki*, WNT.

Klin, Poschel, Rosenbaum, *Algebra stosowana dla matematyków i informatyków*.

<http://www.msn.uph.edu.pl/smp/msn/38/02-11.pdf>

<http://wazniak.mimuw.edu.pl> Matematyka dyskretna 2, wykład 5.

7. Krzywe nieskończonej długości.

Jedną z krzywych nieskończonej długości jest prosta - ciągnie się ona w nieskończoność w dwie strony. Podobnie parabola. Łatwo jednak skonstruować krzywą nieskończonej długości, która jest zawarta w małym obszarze. Przykładowo łatwo sprawdzić, że krzywa Kocha ma nieskończoną długość. Trudniej może być z rozmaitymi spiralami. Innymi ciekawymi przykładami są krzywe wypełniające kwadrat (najpierw zaskakuje nas, że one w ogóle istnieją, a potem że ich konstrukcje muszą być aż tak skomplikowane). Jeszcze inne krzywe to te, z których utkane są np. trójkąt Sierpińskiego albo dywan Sierpińskiego.

Literatura:

1. K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons Ltd, New York.
2. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa.
3. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Fractals for the Classroom*, Springer Science+Business Media LLC, New York.
4. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu, fraktale*, PWN, Warszawa.

8. Logarytmy.

Po co ktoś wymyślił logarytmy? Jaki mają z tym związek tablice matematyczne i suwak logarytmiczny? Dziś już o tych dawnych narzędziach zapomnieliśmy, może zatem powinniśmy zapomnieć też o logarytmach, bo do niczego nam się już nie przydają?

Literatura:

1. M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994.
2. G. Strang, *Calculus*, Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts.
3. G. Tewani, *Logarithm and its Applications*, Cengage Learning, New Delhi.

9. Metryki nie tylko w $\mathbb{R}^n$

Istnieje wiele znanych metryk w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Metryki można też definiować na innych przestrzeniach. Jednym z ciekawszych przykładów jest metryka Hausdorffa zdefiniowana na przestrzeni zbiorów zwartych (łatwo zauważyć, że metryki tej nie możemy zdefiniować jako zwykłej odległości między zbiorami).

Literatura:

- M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, New York 1988.
G. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry*, Springer, New York 2008.
H., J. Musielakowie, *Analiza matematyczna*, t.1, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2004.

10. Zasada szufladkowa Dirichleta

Zasada szufladkowa Dirichleta ma bardzo prostą wypowiedź:

Jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladach, przy czym $n > m$, wówczas w pewnej szufladzie znajdą się co najmniej 2 przedmioty. To nieskomplikowane twierdzenie może stać się narzędziem do rozwiązywania niełatwych, ale ciekawych zadań, na przykład takich:

a) Wykaż, że dla dowolnych 52 liczb całkowitych istnieją dwie różne liczby, których suma lub różnica jest podzielna przez 100.

b) Wykaż, że w dowolnej grupie ludzi są dwie osoby, które mają w tej grupie jednakowe liczby znajomych.

Zadaniem ucznia jest pokazanie jak zastosować zasadę szufladkową Dirichleta do rozwiązywania zadań. Pierwsza pozycja w literaturze jest zestawem zadań, które mogą stanowić punkt wyjścia do opracowania tematu. Można także opracować różne wersje tej zasady lub jej uogólnienie, którym jest zasada podziałowa. Rozwijanie tego tematu w kierunku twierdzenia Ramseya nie jest wskazane.

Literatura:

1. http://www.math.us.edu.pl/rkawa/?Strona_g%B3%F3wna:Zasada_szufladkowa_Dirichleta
2. *Matematyka dyskretna*, Wright, Ross.
3. *Matematyka Dyskretna*, Szepietowski.
4. *Introductory Combinatorics* Brualdi, Richard.

11. Algorytmy sortowania.

Mateamatycy i informatycy często posługują się różnymi algorytmami sortowania. Wśród nich mamy sortowanie bąbelkowe, przez wstawianie, kubełkowe, szybkie. Opisz kilka ze znanych algorytmów sortowania. Wybierz najlepszy z opisanych przez siebie i ten, który pracuje najwolniej.

Czy rodzaj danych wejściowych ma wpływ na szybkość sortowania? Możesz dołączyć do pracy program komputerowy, napisany w dowolnym języku programowania.

Literatura:

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein: *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT, 2007.

12. Czy Telimena lubi Zosię?

Zosia lubi Tadeusza, a Tadeusz Zosię. Czy z tego, że Telimena przepada za Tadeuszem, a Tadeusz za Zosią wynika, że Telimena lubi Zosię? Spójrz na to oczami matematyka. Poznaj pojęcie relacji. Co mają wspólnego relacje z funkcjami? Co to są relacje zwrotne, przechodnie, symetryczne? Podaj ich przykłady i zastosowania w matematyce.

Literatura:

H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 2009.

13. Geometryczne nierówności.

Z dowodami nierówności spotykamy się regularnie. Niektóre dowodzi się wykorzystując wzory skróconego mnożenia, inne używając nierówności dla średnich. Jednak wiele nierówności można wykazać stosując metody geometryczne.

Literatura (przykładowa):

[1] L. Kourliandtchik, *Wędrowki po krainie nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2006.

[2] Artykuły w miesięczniku *Delta*.

[3] Zadania z Olimpiad Matematycznych.

14. Optyka w ujęciu geometrycznym.

Oczu używamy cały czas. Niektórzy z nas mają jednak wadę wzroku i noszą okulary, czyli używają soczewek. Jak one działają? Praca mogłaby polegać na matematycznym opisie działania soczewek (pamiętając, że różne soczewki wykorzystywane są w korekcji krótko- i dalekowzroczności, a inne w przypadku np. astygmatyzmu). Mogłaby zawierać również opis działania oka. W jaki sposób działa geometria oka? Jakie przekształcenia geometryczne opisują działanie soczewek?

Literatura:

[1] E. Hecht, *Optyka*, PWN, Warszawa 2012.

[2] Franciszek Leja, *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1977.

15. Kolorowanki matematyczne.

Kolorowanie nie zawsze jest takim prostym zadaniem jak mogłoby się wydawać.

Kiedy matematyk koloruje wierzchołki grafu, czyni starania, by te, które są połączone krawędzią miały różne kolory. Próbuje też wykorzystać możliwie najmniejszą liczbę kolorów.

Jeśli chcesz, możesz kolorować krawędzie zamiast wierzchołków. Wtedy stosujemy taką zasadę, że dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku nie mogą mieć tego samego koloru. Również w tym przypadku zależy nam na wykorzystaniu minimalnej liczby kolorów. Można też rozważać kolorowanie ścian grafu płaskiego, albo kolorowanie obszarów mapy. Wybierz swój sposób kolorowania grafu. W jakich przypadkach wystarczą Ci tylko 2 albo 3 kolory? Może 3 kolory to za mało?

Literatura:

Appel K., Haken W., *Zagadnienie czterech barw*, Matematyka Współczesna Dwanaście Esejów. Red. Steen L.A., WNT, Warszawa 1983.

Kurlyanchik L., *Impresje matematyczne* tom I, Toruń: Aksjomat, 2013, rozdz. 6.3.

Oyre O., *Wstęp do Teorii Grafów*, PWN, Warszawa 1966, rozdz. 9.

Wilson R.J., *Wprowadzenie do teorii grafów*, wyd.2. PWN, Warszawa 2000, rozdz. 6.

16. Kłamstwa, wierutne kłamstwa, STATYSTYKA.

Celem pracy jest uzasadnienie (a może obalenie?) powyższego stwierdzenia. Autor(ka) pracy może spróbować odpowiedzieć na pytania dlaczego różne opracowania tego samego zbioru danych mogą prowadzić do różnych wniosków, skąd wynikają różnice i czy można stwierdzić, które wnioski są zgodne z rzeczywistością. Praca na ten temat może zawierać opracowanie samodzielnie wybranych zagadnień metodami statystycznymi i wyciągnięcie na ich podstawie wniosków. Dane mogą dotyczyć np. medycyny, finansów, meteorologii czy też zupełnie innych przykładów z własnego podwórka. Ważne, aby w każdym przypadku podać źródło danych i omówić metodę stosowaną w ich opracowaniu.

Literatura:

[1] C. Radhakrishna Rao, *Statystyka i prawda*, PWN, 1994.

[2] Wybrane artykuły i opracowania, a także dalsza literatura dostępne np. na stronie firmy StatSoft <http://www.statsoft.pl/>

17. Liczby Ramseya.

Rozważmy dowolny ciąg niezerowych liczb naturalnych $n_1, \dots, n_k$. Twierdzenie Ramseya mówi, że istnieje liczba n o tej własności, że dla każdego zbioru X mocy co najmniej n takiego, że jego podzbiory dwuelementowe podzielono na k rozłącznych podzbiorów $A_1, \dots, A_k$, istnieje wskaźnik

i ze zbioru $\{1, \dots, k\}$ oraz podzbiór Y zbioru X mocy co najmniej n o tej własności, że wszystkie podzbiory dwuelementowe zbioru Y znajdują się dokładnie w segmencie A_i . Najmniejszą taką liczbę n nazywamy liczbą Ramseya i oznaczamy symbolem $R(n_1, \dots, n_k)$. Wyznaczanie liczb Ramseya nastrocza matematykom wielu trudności. Aby oddać ich skalę warto przytoczyć anegdotę, którą zwykł opowiadać Paul Erdős – największy autorytet w dziedzinie teorii Ramseya:

Wyobraźmy sobie, że wrogo nastawiona i znacznie potężniejsza militarnie obca cywilizacja napada na Ziemię i żąda od ludzi wyznaczenia dokładnej wartości liczby $R(5)$, gdyż w przeciwnym razie zniszczy planetę. Co powinniśmy zrobić, aby nie dopuścić do zagłady? Powinniśmy zmobilizować wszystkich matematyków, informatyków i programistów, zaprogramować wszystkie komputery na świecie i spróbować znaleźć żadaną wartość. A co, jeśli kosmici zażądają wyznaczenia liczby $R(6)$? Wówczas powinniśmy spróbować... zniszczyć najeźdźców.

Spróbuj opisać świat liczb Ramseya i znaleźć ich zastosowania w teorii grafów, teorii mnogości, algebrze i geometrii.

Literatura:

1. M. Kubale, *Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów*, WNT, 2002.
2. W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, 1986.
3. Wilson R.J., *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, 1998.

18. Ciągłość w topologii.

Ciągłe funkcje rzeczywiste (o dziedzienie równej całej prostej lub przedziałowi) wielu postrzega jako takie, których wykresy „można narysować bez odrywania ręki”. Rozumowanie takie prowadzić może jednak do nieporozumień w przypadkach, gdyby regułę tę stosować także do podzbiorów prostych niebędących przedziałami, a przykładowo podzbiorami dyskretnymi.

Topologiczna ciągłość funkcji oznacza odwartość wszystkich przeciobrazów zbiorów otwartych.

Wymaga zatem struktury topologicznej, czyli określenia, co rozumie się przez zbiory otwarte i domknięte. Choć na pierwszy rzut oka wydaje się, że identyczność (także jako funkcja rzeczywista) zawsze powinna być ciągła, w istocie może się taką nie okazać. Przyjmując przykładowo, że w dziedzinie rzeczywistej otwarte są wszystkie zbiory zawierające liczbę zero oraz zbiór pusty, a w przeciwdziedzinie wszystkie zbiory zawierające liczbę Eulera oraz zbiór pusty, natychmiast dochodzimy do wniosku, że identyczność nie jest funkcją ciągłą w przeciwieństwie do funkcji, której wykres powstaje z wykresu identyczności po przesunięciu o wektor $[0, e]$, czyli o jedną liczbę Eulera w górę. Wówczas bowiem przeciwbraz każdego zbioru zawierającego liczbę Eulera, będzie zawierał liczbę zero.

Spróbuj zbadać ciągłość wybranych rzeczywistych (i nie tylko) funkcji wobec różnych struktur topologicznych na prostej. Czy istnieją funkcje ciągłe niezależnie od wybranej topologii w dziedzinie, bądź przeciwdziedzinie? Jakie własności mogą zachowywać funkcje ciągłe określone na przestrzeniach topologicznych?

Literatura:

1. R. Engelking, *Topologia Ogólna*, PWN, 2012.
2. S. Wereński, *Topologia*, Wydawnictwo UTH w Radomiu, 2008.
3. W. Regel, *71 zadań o przestrzeniach metrycznych i topologicznych z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku*, Biblioteczka Opracowań Matematycznych, 2012.