

Propozycje zagadnień na XXXIII Ogólnoposki Sejmik Matematyków

1. Powierzchnie stopnia drugiego

Powierzchnie obrotowe: torus, elipsoida, hiperboloida jednopowłokowa i hiperboloida dwupowłokowa, paraboloida eliptyczna i paraboliczna, powierzchnie prostokreślne, powierzchnie walcowe. Podział powierzchni stopnia drugiego. Równania opisujące powierzchnie stopnia drugiego. Własności wybranych powierzchni.

Literatura: Franciszek Leja, GEOMETRIA ANALITYCZNA, Warszawa, PWN 1977.

2. Przekształcenia geometryczne

Definicja przekształcenia zbioru punktów. Przekształcenia płaszczyzny: przesunięcie, symetria względem osi OX , obrót dookoła punktu, jednokładność. Powinowactwa i podobieństwa. Izometrie. Inwersja. Własności przekształceń oraz związki pomiędzy nimi.

Literatura: Franciszek Leja, GEOMETRIA ANALITYCZNA, Warszawa, PWN 1977.

3. Krzywe algebraiczne wyższych stopni

Definicja krzywych algebraicznych wyższych stopni. Przykłady krzywych: cysoida Dioklesa, strofoida, liść Kartezjusza, parabola Neila, konchoida Nikomedesa, ślimak Pascala, lemniskata Bernoulliego, rozeta czterolistna. Własności wybranych krzywych.

Literatura: Franciszek Leja, GEOMETRIA ANALITYCZNA, Warszawa, PWN 1977.

4. Krzywe przestępne

Definicja krzywych przestępnych. Przykłady krzywych: cykloida, epicykloida, hipocykloida, ewolwenta koła, linia łańcuchowa, spirale: Archimedesowa, hiperboliczna i logarytmiczna. Własności wybranych krzywych. Równania krzywych w postaci parametrycznej, biegunowej i w układzie kartezjańskim.

Literatura: Franciszek Leja, GEOMETRIA ANALITYCZNA, Warszawa, PWN 1977.

5. Wybrane twierdzenia geometrii sferycznej

Definicje prostych, odcinków, łamanych, wielokątów w geometrii sferycznej. Różnice i podobieństwa pomiędzy geometrią euklidesową a geometrią sferyczną. Równoległość prostych, przystawanie trójkątów. Obliczanie obwodu i pola wybranych figur. Twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych w trójkącie

Literatura: N. Stiepanow, TRYGNOMETRIA SFERYCZNA, PWN, Warszawa 1960.

6. Dowody twierdzeń wykorzystujące przystawanie trójkątów i podobieństwo trójkątów

Cechy przystawania trójkątów, cechy podobieństwa trójkątów. Przykładowe twierdzenia, w dowodach których wykorzystuje się przystawanie lub podobieństwo trójkątów: Jeśli w trójkącie dwa boki są równe, to przeciwległe kąty są równe. Odcinki wyznaczone na prostych równoległych przez dwie proste równoległe są równe. Symetralna odcinka jest miejscem geometrycznym punktów równoodległych od obu końców tego odcinka. Dwusieczna kąta jest miejscem geometrycznym punktów równoodległych od obu ramion tego kąta. Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta i jest równy jego połowie. Środkowe trzech boków trójkąta dzielą się wzajemnie w stosunku $1 : 2$. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną dzieli ją na dwie części w taki sposób, że jest dla tych części średnią geometryczną. Jeżeli cięciwy okręgu przecinają się w punkcie leżącym wewnątrz okręgu, to iloczyn długości odcinków każdej cięciwy, zawartych pomiędzy tym punktem i punktami przecięcia z okręgiem, jest stały. Jeżeli sieczne przecinają się w punkcie leżącym na zewnątrz okręgu, to iloczyn długości odcinków każdej siecznej zawartych pomiędzy tym punktem i punktami przecięcia z okręgiem jest stały i równy kwadratowi odcinka stycznej.

Literatura: Podręczniki szkolne.

7. Jak rozpoznać liczby pierwsze

Liczby pierwsze są ważne. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki mówi, że każda liczba naturalna większa od 1 jest iloczynem liczb pierwszych i to tylko na jeden sposób. Ale w jaki sposób odróżnić liczbę pierwszą od pozostałych? Ile jest liczb pierwszych? Tematem pracy mogą być algorytmy sprawdzające pierwszośc liczb naturalnych (testy pierwszości), ale także różne sposoby opisu (wzory) liczb pierwszych.

Literatura: P. Ribenboim, MAŁA KSIĘGA WIELKICH LICZB PIERWSZYCH, WNT, Warszawa 1997.

8. Równania opisujące świat

Nauka próbuje od wieków opisywać zjawiska zachodzące w świecie. Fizycy do swojego opisu potrzebują matematyki. Celem pracy może być próba uzasadnienia lub wyprowadzenia podstawowych równań fizyki matematycznej (np. równanie oscylatora harmonicznego, równanie ciepła, struny, Laplace'a) oraz próba ich rozwiązywania.

Literatura:

1. E. Kącki, RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE W ZAGADNIENIACH FIZYKI I TECHNIKI, WNT, Warszawa 1989.

2. S.K. Godunow, RÓWNANIA FIZYKI MATEMATYCZNEJ, WNT, Warszawa 1975.

9. Sofizmaty matematyczne

Zadaniem ucznia podejmującego się opracowania tego tematu jest znalezienie błędu w powyższym rozumowaniu, wytlumaczenie jego przyczyny i poprawienie. Ponadto praca powinna zawierać szeroki wachlarz sofizmatów różnych rodzajów: sytuacyjnych (jak wyżej), algebraicznych i geometrycznych, wraz z ich omówieniem i wskazaniem występujących w nich błędów.

Literatura:

1. Z. Bobiński, SOFIZMATY MATEMATYCZNE. O PODZIALE ODCINKA NA RÓWNE CZĘŚCI. JAK ZNALEŻĆ PUNKTY W NIESKOŃCZONOŚCI ? Wydawnictwo Aksjomat, 2008.
2. S. Jeleński, LILAVATI, Wydawnictwo PZWS, 1968.
3. W.N. Lange, FIZYCZNE PARADOKSY, SOFIZMATY I ZAJMUJĄCE ZADANIA, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1966.

10. Algorytmy rekurencyjne - wady i zalety

Algorytm iteracyjny obliczający $n!$ polega na wykonaniu mnożenia w każdym kroku pętli. W algorytmie rekurencyjnym mnożymy n przez $(n - 1)!$, czyli schodzimy o krok niżej. W tym przypadku oba algorytmy będą miały podobną efektywność i nie ma wielkiego znaczenia który z nich zastosujemy. Pytanie, kiedy trudno byłoby sobie poradzić bez zastosowania rekurencji? Z drugiej strony, kiedy może być ona zagrożeniem (np. dla złożoności algorytmu)?

Literatura:

1. A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman, PROJEKTOWANIE I ANALIZA ALGORYTMÓW KOMPUTEROWYCH, PWN, Warszawa 1983.
2. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, WPROWADZENIE DO ALGORYTMÓW, WNT, Warszawa 1997.
3. N. Wirth, ALGORYTMY + STRUKTURY DANYCH = PROGRAMY, WNT, Warszawa 1980.

11. Łamigłówki i zagadki

Czy można w dziesięciu rzędach posadzić dziesięć drzew tak, by w każdym rzędzie rosły dokładnie trzy drzewa? Rozwiązanie tej zagadki można znaleźć w pierwszej z podanych pozycji literatury. W pracy powinny się znaleźć pozornie nieskomplikowane zagadki, do których odgadnięcia stosuje się zaawansowane twierdzenia matematyczne.

Literatura:

1. K. Ciesielski, Z. Pogoda, DIAMENTY MATEMATYKI, Pruszyński i S-ka, 1997 .
2. H. Doerie, 100 GREAT PROBLEMS OF ELEMENTARY MATHEMATICS, Dover Publications, New York 1965.
3. W. Schwarz, 40 PUZZLES AND PROBLEMS IN PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS, Springer, Potsdam 2008.

12. Metryki nie tylko w $\mathbb{R}^n$

Istnieje wiele znanych metryk w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Metryki można też definiować na innych przestrzeniach. Jednym z ciekawszych przykładów jest metryka Hausdorffa zdefiniowana na przestrzeni zbiorów zwartych (łatwo zauważyć, że metryki tej nie możemy zdefiniować jako zwykłej odległości między zbiorami).

Literatura:

1. M. F. Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press, New York 1988.
2. G. Edgar, Measure, topology, and fractal geometry, Springer, New York 2008 .
3. H., J. Musielakowie, Analiza matematyczna, tom 1, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004.

13. Matematyka zakorzeniona w filozofii

Rozwój wielu dziedzin matematyki ma swoje początki w filozofii. Przykładem jest logika matematyczna, która zaistniała na przełomie XIX i XX wieku, ale czerpie z nauki, która od starożytności była domeną filozofów. Szereg pojęć, którymi zajmowali się filozofowie było później badanych przez matematyków. Szczególne interesowanie budzą paradoksy czy też trudne do uchwycenia przez ludzki umysł pojęcie nieskończoności. Poszukaj problemu (problemów), które były rozważane przez filozofów. Opisz i wyjaśnij dany problem przy pomocy matematyki.

Literatura:

1. W. Guzicki, P. Zakrzewski, WYKŁADY ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI, PWN, Warszawa 2005.
2. J. Mioduszewski, CIĄGŁOŚĆ – SZKICE Z HISTORII MATEMATYKI, WSiP, Warszawa 1996. - Paradoks Russela,
3. W. Dunham, MATEMATYCZNY WSZECHŚWIAT, str. 266-279, Zysk i S-ka, 1994.
4. Dennis Wildfogel, HOW BIG IS INFINITY ? (<https://www.youtube.com/watch?v=UPA3bwVvzGI>)

14. Liczby pseudopierwsze

Liczby pseudopierwsze to liczby naturalne, które spełniają niektóre własności charakteryzujące liczby pierwsze, ale same nie są liczbami pierwszymi. Praca mogłaby zawierać pewne własności tych liczb lub opis kategorii tych liczb lub ich zastosowania lub algorytmy generujące te liczby.

Literatura: N. Koblitz, WYKŁAD Z TEORII LICZB I KRYPTOGRAFII, WNT, 2006.

15. Rozmieszczanie przedmiotów w pudełkach

Na ile sposobów można rozmieścić przedmioty w pudełkach jeśli możliwe są różne sytuacje: przedmioty są rozróżnialne lub nie oraz pudełka są rozróżnialne lub nie. Dodatkowo możemy postawić różne założenia o zawartości pudełek - mogą zawierać dowolną ilość przedmiotów lub co najwyżej jeden przedmiot. Przedstaw rozwiązania przedstawionych sytuacji wraz z opisem obiektów kombinatorycznych otrzymanych w wyniku rozwiązań.

Literatura:

1. Zbigniew Palka, Andrzej Ruciński, WYKŁADY Z KOMBINATORYKI, WNT, 2004.

2. Victor Bryant, ASPEKTY KOMBINATORYKI, WNT, 2007.

16. Matematyka kontra fizyka - Izaak Newton

O Izaaku Newtonie mówi się głównie na lekcjach fizyki. Był profesorem fizyki i matematyki na Uniwersytecie w Cambridge. Uczniowie klas II szkół ponadgimnazjalnych uczą się jak rozwiązać równania wielomianowe. Poszukaj informacji o metodzie opracowanej przez Newtona zwanej metodą stycznych. Opisz ją i podaj przykłady jej zastosowania.

Literatura:

1. Maria Kosiorowska, Tadeusz Stanisław, METODY NUMERYCZNE,

2. Kraków, Wydaw. Akademii Ekonomicznej, 2004

17. Czy Telimena lubi Zosię?

Zosia lubi Tadeusza, a Tadeusz Zosię. Czy z tego, że Telimena przepada za Tadeuszem, a Tadeusz za Zosią wynika, że Telimena lubi Zosię? Spójrz na to oczami matematyka. Poznaj pojęcie relacji. Co mają wspólnego relacje z funkcjami? Co to są relacje zwrotne, przechodnie, symetryczne? Podaj ich przykłady i zastosowania w matematyce.

Literatura:

Rasiowa, Helena. WSTĘP DO MATEMATYKI WSPÓŁCZESNEJ, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009

18. Liczby Ramseya

Rozważmy dowolny ciąg niezerowych liczb naturalnych $n_1, \dots, n_k$. Twierdzenie Ramseya mówi, że istnieje liczba n o tej własności, że dla każdego zbioru X mocy co najmniej n takiego, że jego podzbiory dwuelementowe podzielono na k rozłącznych podzbiorów $A_1, \dots, A_k$. Istnieje wskaźnik i ze zbioru $\{1, \dots, k\}$ oraz podzbiór Y zbioru X mocy co najmniej n i o tej własności, że wszystkie podzbiory dwuelementowe zbioru Y znajdują się dokładnie w segmencie A_i . Najmniejszą taką liczbę n nazywamy liczbą Ramseya i oznaczamy symbolem $R(n_1, \dots, n_k)$. Wyznaczanie liczb Ramseya nastrocza matematykom wielu trudności. Aby oddać ich skalę warto przytoczyć anegdotę, którą zwykł opowiadać Paul Erdős – największy autorytet w dziedzinie teorii Ramseya: Wyobraźmy sobie, że wrogo nastawiona i znacznie potężniejsza militarnie obca cywilizacja napada na Ziemię i żąda od ludzi wyznaczenia dokładnej wartości liczby $R(5)$, gdyż w przeciwnym razie zniszczy planetę. Co powinniśmy zrobić, aby nie dopuścić do zagłady? Powinniśmy zmobilizować wszystkich matematyków, informatyków i programistów, zaprogramować wszystkie komputery na świecie i spróbować znaleźć żadaną wartość. A co, jeśli kosmici zażądają wyznaczenia liczby $R(6)$? Wówczas powinniśmy spróbować ... zniszczyć najeźdźców. Spróbuj opisać świat liczb Ramseya i znaleźć ich zastosowania w teorii grafów, teorii mnogości, algebrze i geometrii.

Literatura:

1. M. Kubale, OPTYMALIZACJA DYSKRETNA. MODELE I METODY KOLOROWANIA GRAFÓW, WNT, 2002

2. W. Lipski, W. Marek, ANALIZA KOMBINATORYCZNA, PWN, 1986

3. Wilson R.J., WPROWADZENIE DO TEORII GRAFÓW, PWN, 1998

19. Ciągłość w topologii

Ciągłe funkcje rzeczywiste (o dziedzinie równej całej prostej lub przedziałowi) wielu postrzega jako takie, których wykresy „można narysować bez odrywania ręki”. Rozumowanie takie prowadzić może jednak do nieporozumień w przypadkach, gdyby regułę tę stosować także do podzbiorów prostych niebędących przedziałami, a przykładowo podzbiorami dyskretnymi. Topologiczna ciągłość funkcji oznacza otwartość wszystkich przeciobrazów zbiorów otwartych. Wymaga zatem struktury topologicznej, czyli określenia, co rozumie się przez zbiory otwarte i domknięte. Choć na pierwszy rzut oka wydaje się, że identyczność (także jako funkcja rzeczywista) zawsze powinna być ciągła, w istocie może się tak nie okazać. Przyjmując przykładowo, że w dziedzinie rzeczywistej otwarte są wszystkie zbiory zawierające liczbę zero oraz zbiór pusty, a w przeciwdziedzinie wszystkie zbiory zawierające liczbę Eulera oraz zbiór pusty, natychmiast dochodzimy do wniosku, że identyczność nie jest funkcją ciągłą w przeciwnieństwie do funkcji, której wykres powstaje z wykresu identyczności po przesunięciu o wektor $[0, e]$, czyli o jedną liczbę Eulera w górę. Wówczas bowiem przeciobraz każdego zbioru zawierającego liczbę Eulera, będzie zawierał liczbę zero. Spróbuj zbadać ciągłość wybranych rzeczywistych (i nie tylko) funkcji wobec różnych struktur topologicznych na prostej. Czy istnieją funkcje ciągłe niezależnie od wybranej topologii w dziedzinie, bądź przeciwdziedzinie? Jakie własności mogą zachowywać funkcje ciągłe określone na przestrzeniach topologicznych?

Literatura:

1. R. Engelking, TOPOLOGIA OGÓLNA, PWN, 2012
2. S. Wereński, TOPOLOGIA, Wydawnictwo UTH w Radomiu, 2008
3. W. Regel, ZBIÓR ZADAŃ O PRZESTRZENIACH METRYCZNYCH I TOPOLOGICZNYCH Z PEŁNYMI ROZWIĄZANAMI KROK PO KROKU, Biblioteczka Opracowań Matematycznych, 2012

20. Prawie poprawne „dowody” słynnych hipotez

W matematyce jest sporo nierozwiązanych do tej pory problemów, a zrozumienie większości z nich wymaga dość dużej wiedzy spoza zakresu szkolnej matematyki. Jest jednak kilka otwartych problemów, których sformułowanie będzie jasne nawet dla ucznia gimnazjum. Należą do nich min. hipoteza Goldbacha, mówiąca o tym, że każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych, a także hipoteza Collatza, znana też jako problem $3n + 1$, zakładająca, że jeśli weźmiemy dowolną liczbę naturalną n , podzielimy ją przez 2 w przypadku gdy jest parzysta lub zastąpimy przez $3n + 1$ w przypadku gdy jest nieparzysta, dla uzyskanego wyniku tą procedurę będziemy powtarzać, to w końcu osiągniemy liczbę 1. Wielu matematyków próbowało rozwiązać któryś z tych dwóch problemów, jednak jak dotąd nikt nie podał poprawnego dowodu. Zawsze w rozumowaniach pojawiała się luka. Większość poważnych ataków na te hipotezy wykorzystuje zaawansowaną aparaturę matematyczną, jednak ze względu na ich elementarne sformułowania można odnieść wrażenie, że również ich dowód może być krótki i prosty. W związku z tym zdarza się, że swoich sił na tym polu próbują nawet osoby bez wykształcenia matematycznego. W Internecie krąży dużo takich elementarnych „dowodów”, jednak najprawdopodobniej w każdym z nich jest jakaś usterka. Można nawet znaleźć (np. na arXiv.org) krótką pracę, w której autor uzasadnia, że dowód hipotezy Collatza, gdyby istniał, musiałby mieć nieskończoną długość, a więc hipotezy tej nikt nigdy nie udowodni. Cel pracy sejmikowej na ten temat to wybranie jednej z hipotez, znalezienie przy pomocy wyszukiwarki internetowej jednego lub kilku jej elementarnych „dowodów” i przeprowadzenie ich analizy eksponującej pomysł autora na atak problemu oraz jasno wskazujący luki w dowodzie. Możliwe też jest, że badane rozumowanie po pewnych modyfikacjach stanie się całkowicie poprawnym dowodem, ale innego, słabszego twierdzenia.

Literatura:

1. http://pl.wikipedia.org/wiki/Problem_Collatza
2. <http://www.matematyka.pl/137128.htm>
3. <http://occampress.com/>

21. Wokół nierówności Shapira

Okazuje się, że dla $n < 14$ nierówność ta jest prawdziwa. Jest ona także prawdziwa dla $n = 15, 17, 19, 21, 23$, ale nie jest ona prawdziwa dla $n = 14, 16, 18, 20, 22$ i dla $n > 23$. Vladimir Drinfeld (laureat medalu Fieldsa z 1990 roku) udowodnił, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi słabsza wersja nierówności. W pracy mogłyby się znaleźć dowody szczególnych przypadków nierówności Shapira, przykłady zastosowań oraz ewentualne modyfikacje i uogólnienia wyjściowego problemu.

Literatura:

1. J. Górnicki, OKRUCHY MATEMATYKI, PWN, Warszawa 1995.
2. D.S. Mitrinović, ELEMENTARNE NIERÓWNOŚCI, PWN, Warszawa 1972.
3. H. Lee, TOPICS IN INEQUALITIES - THEOREMS AND TECHNIQUES
(<http://www.math.rochester.edu/people/faculty/dangeba/tin2006new.pdf>)
4. T.J. Mildorf, OLYMPIAD INEQUALITIES, (<http://artofproblemsolving.com/articles>)
5. K. Kedlaya, $A < B$ (A IS LESS THAN B), (<http://artofproblemsolving.com/articles>)