PROPOZYCJE ZAGADNIEŃ
na
XXXI OGÓLNOPOLSKI SEJMIK MATEMATYKÓW

1. **Z matematyką na wakacje**

Zwiedzając miasta, czy przemierzając szlaki zastanawiamy się jaką wybrać trasę aby zobaczyć dużo i nie wracać do tych samych miejsc, a może lepiej będzie przejść każdą uliczką, alejką czy ścieżką tylko raz. Wybierz dowolne miasto lub Park Narodowy i zaproponuj plan swojej wycieczki. Jeżeli jesteś miłośnikiem turystyki rowerowej zaproponuj trasy rowerowe. Pomocy w rozwiązaniu tego zadania poszukaj w teorii grafów zapoznaj się z grafami Eulera lub grafami Hamiltona.

[1] R.J. Wilson, Wprowadzenie do teorii grafów, PWN, Warszawa 2000.

[2] K.S. Ross, Ch.R.B. Wright, Matematyka dyskretna, PWN, Warszawa 1996.

[3] Z. Palka, A. Ruciński, Wykłady z kombinatoryki, WNT, Warszawa 2004.

[4] V. Bryant, Aspekty kombinatoryki, WNT, Warszawa 1997.

[5] W. Lipski, Kombinatoryka dla programistów, WNT, Warszawa 1989.

2. **Różne dowody jednej tożsamości**

W artykule *Pięć dowodów jednej tożsamości* [Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie, Numer 47, Lipiec 2011] Wojciech Guzicki przedstawia różne dowody tożsamości kombinatorycznej:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n.$$

Pokazuje podejście analityczne, algebraiczne, kombinatoryczne, a także dowody algorytmiczne – Algorytm Siostry Celine, Algorytm Gospera, metodę funkcji tworzących.

Celem pracy na Sejmik jest objaśnienie tych metod oraz rozwiązanie za ich pomocą ciekawych zadań (zadania podane są też w cytowanym artykule).

[1] http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/47/guzicki.pdf

3. **Bałagan kontra porządek**

Relacje to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów. Relacje posiadające określone własności dzielimy na klasy. Najbardziej znane, to relacje zwrotne, symetryczne, antysymetryczne czy przechodnie. Są relacje, które porządkują zbiory, są takie które dzielą go na podzbiory elementów nierozróżnialnych. Opisz te relacje, działania, które można na nich wykonać oraz znajdź ich ciekawe przykłady.

[1] H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, PWN, Warszawa, 1990.

[2] Z. Moszner, O teorii relacji, WSiP, Warszawa, 1974.

[3] J. Cichoń, Wykłady ze wstępu do matematyki, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2003

[4] J.A. Szrejder, Równość, podobieństwo, porządek, WNT, Warszawa, 1975.

4. **Zasada szufladkowa Dirichleta**

Tematem pracy jest sformułowanie różnych wariantów zasady szufladkowej Dirichleta i jej uogólnienia zwanego zasadą podziałową oraz zastosowanie tych zasad w rozwiązywaniu elementarnych zadań matematycznych. Oto kilka przykładów takich zadań.

- Pokazać, że w każdym układzie dziesięciu punktów w kwadracie o boku 1, istnieje para punktów, których odległość nie przekracza $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
- Dowieść, że każdy wielościan ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.
- Pomalujmy płaszczyznę w dowolny sposób na dwa kolory: biały i czarny. To znaczy przypiszmy każdemu punktowi płaszczyzny jeden z tych dwu kolorów. Pokazać, że na takiej płaszczyźnie istnieje prostokąt, który ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru. Czy to zadanie można uogólnić na dowolną liczbę kolorów?
- W ciągu jednego miesiąca (30 dni) pewien zespół pracowników zmontował 49 samochodów, przy czym codziennie montowano całkowitą i dodatnią liczbę samochodów. Udowodnić, że w pewnym okresie kolejnych dni zmontowano dokładnie 10 samochodów.

Rozwijanie tego tematu w kierunku twierdzenia Ramseya nie jest wskazane.

[1] K. A. Ross, C. R. B. Wright "Matematyka dyskretna".

[2] Wszystkie odręczniki poświęcone kombinatoryce

[3] Internet

5. **Grupy krystalograficzne**

Jednym z najbardziej fascynujących zastosowań teorii grup w naukach przyrodniczych jest opis i klasyfikacja grup krystalograficznych. W przestrzeni trójwymiarowej istnieje 219 różnych typów grup przestrzennych (230 uwzględniając chiralne), które przedstawiają i opisują symetrie kryształów. Grupy przestrzenne w trójwymiarowej przestrzeni powstały w wyniku połączenia 32 krystalograficznych grup punktowych z 14 sieciami Bravaisa należących do jednego z 7 układów krystalograficznych. Z tego powodu grupy przestrzenne uwzględniają kombinacje translacji komórki elementarnej i operacji wykonywanych na grupach punktowych, są zatem stosunkowo proste do "obliczenia" przy użyciu prostego aparatu pojęciowego algebry. Istnieje co najmniej 10 różnych możliwości klasyfikowania grup przestrzennych w przestrzeni trójwymiarowej. Przykładowa praca mogłaby zająć się opisem wybranych klasyfikacji. Wydaje się, że praca mogłaby być dodatkowo uatrakcyjniona przez zastosowanie komputera do obliczeń, jak również do ilustrowania wybranych grup.

[1] Trzaska Durski Z., Trzaska Durska H.: Podstawy krystalografii. Warszawa: OW Politechniki Warszawskiej, 2003

[2] Kim, Shoon K., Group theoretical methods and applications to molecules and crystals, Cambridge University Press, 1999

[3] A.I. Kostrykin, Wstęp do algebry, t. III, PWN, Warszawa 2005

[4] G.James, M. Liebeck, Reprezentacje i charaktery grup, Wydawnictwo UAM, Poznań 2002

[5] J.-P. Serre, Reprezentacje liniowe grup skończonych, PWN 1988

6. **Hipoteza Poincarego**

Światowe media obiegła w 2006 roku lotem błyskawicy wiadomość o rosyjskim geniuszu, który dobrowolnie zrezygnował z przyznanej mu nagrody miliona dolarów za rozwiązanie stuletniego problemu w matematyce. Geniuszem, o którym mowa, jest prof. Grigori Perelman, a słynnym problemem – hipoteza Poincare'go z 1904 roku. O ile większość gazet dość drobiazgowo rozpisywała się o ekscentryczności rosyjskiego matematyka, o tyle mało kto pokusił się o wyjaśnienie, na czym właściwie polega hipoteza Poincare'go w swoim najprostszym sformułowaniu, jakkolwiek potrzebny do zrozumienia aparat pojęciowy wcale nie jest zaawansowany i nie powinien przysporzyć trudności osobie interesującej się matematyką, która dysponuje tylko standardowym wykształceniem ze szkoły średniej. Przykładowa praca mogłaby zająć się przybliżeniem czytelnikowi dysponującemu tylko szkolną wiedzą matematyczną znaczenia hipotezy Poincare'go. Jakkolwiek wiążące się z opisywanym problemem zagadnienie klasyfikacji rozmaitości w wymiarach wyższych od 3 jest skomplikowane pojęciowo, o tyle klasyfikacja powierzchni domkniętych w wymiarze 2 jest stosunkowo prosta i często pojawia się jako ilustracja w podręcznikach topologii algebraicznej.

[1] P. Strzelecki, Hipoteza Poincarego, Delta, 1/2004.

[2] R. Duda, Trzeci problem milenijny: hipoteza Poincarego, Wiadomości Matematyczne 38 (2002), 63-90.

[3] D. O'Shea, he Poincare Conjecture: In Search of the Shape of the Universe, Walker and Company, 2007.

7. **Matematyka łamania szyfrów**

Obecnie każdy z nas ma na co dzień do czynienia (najczęściej nieświadomie) z kryptologią, czyli gałęzią matematyki zajmującą się szyframi i szyfrowaniem. Korzystając z komputera, bankomatu czy telefonu korzystamy z jej odkryć, przekazując informacje – hasła, kody, wiadomości – mając nadzieję, że nie trafią one do osób nieuprawnionych. Z drugiej strony kryptoanalitycy (z różnych pobudek) zajmują się łamaniem systemów kryptograficznych.

Jeśli zainteresował Cię ten temat, Twoim zadaniem jest poznanie i zmierzenie się z metodami kryptoanalizy, czyli łamania szyfrów, oraz matematyką, która za nimi stoi. Oczywiście następnie będziesz musiał zaprezentować je innym uczestnikom Sejmiku. A może masz swoje własne metody i przekonasz nas o ich skuteczności?

[1] D.R. Stinson - Kryptografia. W teorii i praktyce, WNT 2005.

[2] A.J. Menezes, P. van Oorschot, S. Vanstone - Kryptografia stosowana, WNT 2005.

[3] N. Koblitz - Algebraiczne aspekty kryptografii, WNT 2000.

8. **Średnie i ich własności**

Każdy prawdopodobnie zna średnią arytmetyczną dwóch liczb rzeczywistych x, y równą $A(x,y) = \frac{x+y}{2}$ oraz średnią geometryczą dwóch liczb dodatnich: $G(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$. Wiadomo także, że $G(x,y) \leqslant A(x,y)$ i równość zachodzi tylko gdy $x = y$. Znanych jest jeszcze kilka innych średnich: średnia harmoniczna, potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna i inne. Każda z nich posiada wiele ciekawych własności. Często nie jest łatwo sprawdzić, czy dana średnia $M(x,y)$ rzeczywiście jest średnią, tzn. czy jej wartość mieści się w przedziale między mniejszą i większą z liczb x, y. Aby udowodnić to dla średniej logarytmicznej, zdefiniowanej jako $L(x,y) = \frac{y-x}{\ln y - \ln x}$ dla x, y dodatnich musimy zastosować rachunek różniczkowy, a dokładnie twierdzenie Lagrange'a. O średniej logarytmicznej można powiedzieć dużo więcej, na przykład prawdziwe jest oszacowanie

$$G(x,y) \leqslant L(x,y) \leqslant A(x,y)$$

dla x, y dodatnich.

Praca mogłaby zawierać dyskusje wybranych rodzajów średnich wraz z ich wzajemnymi związkami. Można również podać przykłady użycia średnich w zadaniach, a także zastosowania praktyczne różnych średnich.

[1] P.S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers (2003).

[2] L. Kourliandtchik, *Kraina nierówności*, Aksjomat Toruń (2006).

[3] D.S. Mitrinovic, *Elementarne nierówności*, PWN (1972).

9. **Inwersja**

W Wikipedii możemy przeczytać, że inwersję można sobie wyobrazić jako "wywinięcie" wnętrza ustalonego koła na zewnątrz i "zawinięcie" zewnętrza tego koła do jego wnętrza. Jest to często zapomniane i pomijane przekształcenie geometryczne, które jednak posiada wiele ciekawych własności i może być wykorzystane do dowodu wielu twierdzeń geometrycznych oraz w rozwiązaniu wielu zadań konkursowych (np. olimpijskich).

[1] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, Geometria poglądowa, PWN, Warszawa 1956

[2] H. Coxeter, Wstęp do geometrii dawnej i nowej, PWN, Warszawa 1967,

[3] Artykuły w czasopiśmie "Delta" (np. M. Pluta, Wykorzystanie inwersji względem okręgu w dowodzie twierdzenia o okręgach stycznych, Delta, kwiecień 2008),

[4] Artykuły z miesięcznika Matematyka.

10. **Wpływ różnych czynników (katastrofy ekologiczne, działalność człowieka...) na zmiany zachodzące na naszej planecie**

W pracy można skupić się na największych katastrofach związanych z działalnością człowieka (np. awarie na platformach wiertniczych, awarie tankowców, skażenia przemysłowe, pożary) oraz na takich, na które człowiek nie ma wpływu, albo nie jest bezpośrednią ich przyczyną (największe trzęsienia ziemi, wybuchy wulkanów, huragany). Warto podać, zinterpretować i porównać dane liczbowe związane ze skutkami omawianych katastrof oraz porównać wpływ różnych czynników na zmiany zachodzące w naszym środowisku

[1] Brandt S., Analiza danych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[2] Internet

11. **Matematyczne modele i zmiany klimatu**

Czy mamy się czego obawiać? Czy naprawdę działalność człowieka i emisja gazów cieplarnianych podowuje globalne ocielplenie? A może ocieplenie chwilowe naprawdę jest i jego niektóre skutki są niekorzystne, ale jednak nie jest spowodowane przez działalność człowieka? Przecież klimat ziemski ocieplał się i oziębiał już wiele razy, w sposób całkowicie naturalny, zanim pojawił się człowiek. Czy teraz jest inaczej? W pracy można odpowiedzieć wykorzystując modele matematyczne na te i wiele podobnych pytań.

[1] Brandt S., Analiza danych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[2] Iribarne J. V., Cho H. R., Fizyka atmosfery, PWN Warszawa 1988

[3] Kożuchowski K. (ed.), Meteorologia i klimatologia, PWN Warszawa 2005

[4] Martyn D., Klimaty kuli ziemskiej, WN PWN Warszawa 1995

[5] Retallack J. 1991, Podstawy meteorologii, IMGW, Warszawa

[6] Schonwiese Ch.-D., Klimat i człowiek, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997

12. **Modele matematyczne w epidemiologii**

Tworzenie matematycznych modeli w epidemiologii odgrywa niezwykle doniosłą rolę. Mają one pomóc w przewidzeniu możliwych dróg rozwoju chorób i epidemii zanim one realnie nastąpią. W pracy można zająć się jednym wybranym prostym modelem i wskazać jego zastosowania

[1] U. Foryś, Matematyka w biologii, Wydawnictwa Naukowo Techniczne Warszawa 2005,

[2] James D. Murray, Wprowadzenie do biomatematyki, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2006,

[3] J. Uchmański Klasyczna Ekologia Matematyczna, PWN, Warszawa, 1992.

[4] J.D. Murray, Wprowadzenie do biomatematyki, PWN, Warszawa, 2006.

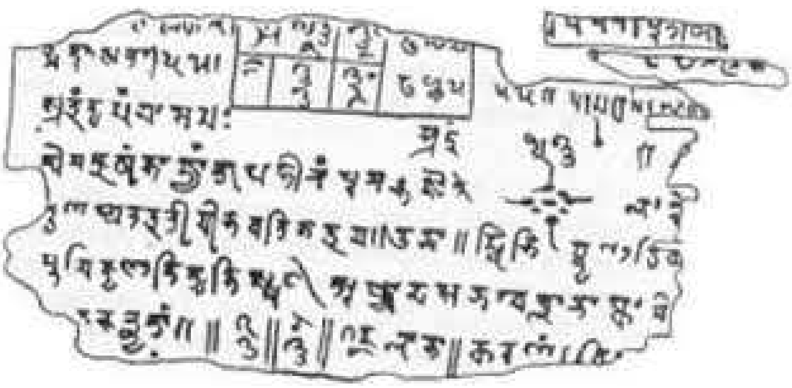
[5] A. Okubo, Diffusion and ecological problems: Mathematical Models, Springer, 1980.

13. **Starożytne manuskrypty matematyczne**

Na przestrzeni wieków powstało wiele wybitnych dzieł matematycznych. Warto więc sięgnąć do historii i przyjrzeć się, w jaki sposób wielcy matematycy radzili sobie z problemami tej przepięknej dziedziny nauki.

Obecnie znanych jest wiele starożytnych rękopisów matematycznych. Nie sposób jest, aby wymienić je tu wszystkie, ale warto wspomnieć o takich, jak:

- **Manuskrypt Bakhshali** – starożytny manuskrypt hinduski odnaleziony w 1881 roku w wiosce Bakhshali. Można w nim odnaleźć różne interesujące techniki obliczania pierwiastka kwadratowego czy też rozwiązywania równań kwadratowych.



- **Papirus moskiewski** – egipski rękopis datowany na około 1850 r. p.n.e. Zawiera rozwiązania kilku problemów arytmetycznych oraz geometrycznych.

- **Papirus Rhinda** – wielkie dzieło matematyki egipskiej datowane na około 1650 r. p.n.e. Wśród wielu interesujących zagadnień można w nim znaleźć między innymi zadania z algebry, geometrii, związane z postępem arytmetycznym, a także i odwrotnością.

[1] A.B. Chace, The Rhind Mathematical Papyrus: Free Translation and Commentary with Selected Photographs, Translations, Transliterations and Literal Translations, Classics in Mathematics Education 8. 2 vols. Oberlin: Mathematical Association of America, 1927-1929. (Reprinted Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1979).

[2] M. Clagett, Ancient Egyptian Science: A Source Book, volume 3: Ancient Egyptian Mathematics, Memoirs of the American Philosophical Society 232. Philadelphia: American Philosophical Society, 1999.

[3] T. Hayashi, The Bakhshali manuscript: An ancient Indian mathematical treatise (Groningen, 1995)

[4] R. Hoernle, On the Bakhshali Manuscript, BiblioLife, 2009.

[5] G. Robins, C. Shute, The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text, London: British Museum Publications Limited, 1987.

[6] http://moscowmathematicalpapyrus.blogspot.com/

[7] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Bakhshali_manuscript.html

[8] http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient- Africa/mad_ancient_egypt_geometry.html#moscow10

[9] http://www.math.tamu.edu/ don.allen/history/egypt/node4.html

[10] http://www.new.dli.ernet.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_1/20005af4_112.pdf