

XXX Ogólnopolski Sejmik Matematyków

Propozycje zagadnień

1. »Do n razy sztuka«

Opis:

Jakob Bernoulli w książce „Sztuka przewidywania” („Ars Conjectandi”) rozważał przypadek, gdy w urnie znajduje się 3000 białych kamyków oraz 2000 czarnych. Zastanawiał się, czy można określić, ile jest kamyków białych, a ile czarnych, losując skończoną ilość razy kamyk z urny i sprawdzając, ile razy wylosowano biały, a ile razy czarny kamyk. Czy możemy dokonać tak dużej ilości losowań, aby mieć pewność, że stosunek białych kamyków do czarnych wyniesie $3 : 2$? Jeden z wyników zawartych w książce, tzw. prawo wielkich liczb (Bernoulliego) objaśnia, w jakim sensie wyniki obserwacji wielu prób odpowiadają prawdopodobieństwom. W pracy można by między innymi dokładnie wyprowadzić słabe i mocne prawa wielkich liczb Bernoulliego oraz omówić różnice między nimi.

Literatura:

- [1] J. Jakubowski, R. Sztencel, Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego, SCRIPT, Warszawa 2002,
- [2] J. Jakubowski, R. Sztencel, Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, SCRIPT, Warszawa 2004,
- [3] A. Plucińska, E. Pluciński,
 Probabilistyka. Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne,
 Nauk.-Tech., Warszawa 2000,
- [4] I. Stewart, Oswajanie nieskończoności. Historia Matematyki, Prószyński i S-ka, Warszawa 2009.

2. »Leibniz vs. Newton«

Opis:

W drugiej połowie siedemnastego wieku Gottfried Wilhelm Leibniz i Isaac Newton niezależnie od siebie odkryli rachunek różniczkowy i całkowy. Jeden zajmując się problemem znajdowania stycznej do krzywej, drugi próbując opisać przyciąganie ciał niebieskich. W pracy można by opisać jakie korzyści płynęły i wciąż płyną z tego odkrycia. Można też spróbować porównać, jak każdy z naukowców doszedł do swoich wniosków.

Literatura:

- [1] C. B. Boyer, Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć, PWN, Warszawa 1964
- [2] M. Kline, Matematyka a świat fizyczny, PWN, Warszawa 1964.
- [3] I. Stewart, Oswajanie nieskończoności. Historia Matematyki, Prószyński i S-ka, Warszawa 2009
- [4] G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa 1976.

3. »Dzielenie sekretu«

Opis:

Rozważmy następującą sytuację¹: Rodzeństwo Sandra, Staś i Sonia zostają obdarowani jedną ogromną bombonierką. Niestety wszyscy są łakomczuchami i każde z nich podejrzewa, że brat lub siostra będzie podkraść czekoladki. Decydują się na schowanie bombonierki w sejfie, do którego dziewięciocyfrowy szyfr zna Mama. Aby móc tylko i wyłącznie razem sięgać po łakocie, Mama nie podaje dzieciom całego szyfru, ale każdemu dziecku daje tylko trzy kolejne cyfry szyfru poczynając od najstarszego. W ten sposób dzieci mogą sięgać po słodczyce wstępując po kolei swój kawałek szyfru, ale tylko wtedy, gdy jednocześnie będą miały ochotę na coś słodkiego, nie obawiając się, że rodzeństwo zje więcej czekoladek.

Powyższy przykład jest prezentacją pojęcia jakim jest dzielenie sekretu. Podział sekretu (ang. secret sharing) polega na rozdzieleniu pewnej informacji, zwanej kluczem bądź sekretem, pomiędzy członków ustalonej grupy zwanej uczestnikami, w taki sposób, aby tylko cała grupa, bądź uprawniona podgrupa mogła tę informację odzyskać. Fragment informacji należący do jednej z osób nazywany jest udziałem (ang. share). W schematach dzielenia sekretu wyróżnia się dealera, który jest odpowiedzialny za generowanie udziałów dla poszczególnych uczestników oraz ich bezpieczną dystrybucję. W powyższym przykładzie dealerem była oczywiście Mama, a uczestnikami Sandra, Staś i Sonia.

Nietrudno sobie wyobrazić jak wiele zastosowań ma dzielenie sekretu w takich miejscach jak banki, firmy czy wojsko. Z matematycznego punktu widzenia bezpieczne i nieskomplikowane schematy można realizować za pomocą niezbyt trudnych narzędzi

takich jak interpolacja Lagrange'a lub chińskie twierdzenie o resztach. Praca powinna zawierać szeroki wachlarz zastosowań, jednak w zasadniczej części pracy powinny być omówione wybrane schematy dzielenia sekretu (ze szczególnym uwzględnieniem opisu algorytmu obliczania udziałów przez dealera i opisu algorytmu łączenia udziałów przez uczestników).

Literatura:

- [1] J. Pieprzyk, T. Hardjono, J. Seberry, Teoria bezpieczeństwa systemów komputerowych.
- [2] D. R. Stinson, Kryptografia. W teorii i w praktyce.
- [3] www.matstos.pjwstk.edu.pl/no7/no7_kulesza.nowosielski.pdf

4. »"Półprawdy, kłamstwa i statystyki"«

Opis:

Ten przewrotny tytuł ma zachęcić uczestników konkursu do zaznajomienia się z niezwykle ważną, lecz równie często niedocenianą częścią matematyki stosowanej, jaką jest statystyka. Prace z tego tematu polegałyby na wyszukaniu, omówieniu i zdemaskowaniu przykładów błędnego użycia metod statystycznych (lub szerzej - ilościowych). Mogą również zawierać wyjaśnienia fałszywych stereotypów, na jakie napotykamy w życiu, a powodowanych brakami w wykształceniu matematycznym. Przykładów błędów związanych z używaniem niewłaściwych miar i wskaźników, zwodniczej prezentacji danych, wyciągania błędnych wniosków (np. nieużywanie reguły Bayesa!), lub stosowaniem metod bez sprawdzania prawdziwości założeń, których leżą u ich podstaw, można szukać prasie codziennej, literaturze popularnonaukowej i naukowej (sic!), jak też próbować spreparować samemu.

Literatura:

- [1] John Allen Paulos, Analfabetyzm matematyczny i jego skutki, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1999;
- [2] Good P.I., Hardin J.W., Common Errors in Statistics (and How to Avoid Them), John Wiley & Sons, 2003;
- [3] Huffa D., How To Lie With Statistics, W.W. Norton & Company, 1954, 1982, 1993;
- [4] Janina Józwiak, Jarosław Podgórski, Statystyka od podstaw, PWE, Warszawa 1998;
- [5] Andrzej Łuszniewicz, Statystyka nie jest trudna, PWE, Warszawa 1997;
- [6] L. Gajek, M. Kałuska, Wnioskowanie statystyczne, WNT, Warszawa 1993;

5. »Twierdzenia o wartości średniej«

Opis:

Proponuję przedstawienie kilku twierdzeń o wartości średniej (Lagrange'a, Rolle'a, Cauchy'ego, Fletta, Pompeiu,...), ich interpretacji geometrycznych, zastosowań (na przykład do dowodzenia nierówności, przykłady można znaleźć w zbiorach zadań z analizy matematycznej, na przykład w [1] i [2]), związki punktów pośrednich ze znanymi średnimi. Ciekawe informacje na ten temat można znaleźć, na przykład, w [3] i [4].

Literatura:

- [1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
- [2] M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1, Oficyna Wydawnicza GiS
- [3] T. Tkocz, Niezwykła hiperbola, twierdzenia o wartości średniej i równania funkcyjne, Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie 48 (2012) (http://www.mimuw.edu.pl/~tkocz/mypapers/mathematics/mvt_msn.pdf)
- [4] P. Sahoo, T. Riedel, Mean value theorems and functional equations, World Scientific Publishing Co., NJ 1998

6. »Punkty ekstremalne w zadaniach«

Opis:

W artykule "Ekstremalność jako narzędzie do rozwiązywania zadań z matematyki" (Matematyka Społeczeństwo Nauczanie, 48 (2012)) M. Kieza przedstawił jak można wykorzystać "ekstremalność" - do rozwiązywania zadań z różnych działów matematyki: algebry, analizy, geometrii, kombinatoryki. Cel pracy konkursowej na ten temat, to zaprezentowanie własnych rozwiązań, nietypowych, ciekawych, różnych zadań z olimpiad matematycznych i innych konkursów, w których wykorzystano istnienie obiektu największego/najmniejszego/najlepszego pod jakimś względem.

Literatura:

- [1] Internet

7. »Twierdzenia typu Ramseya«

Opis:

Zgodnie z oczywistą i doskonale znaną zasadą szufladkową, jeżeli w n pudełkach rozmieścimy $n + 1$ przedmiotów, to znajdzie się takie pudełko, które mieści co najmniej dwa przedmioty. Ten trywialny fakt stał się genezą dla szeregu pięknych i dalece nieoczywistych twierdzeń, z których jako pierwsze należy wymienić twierdzenie Ramseya (w wersji „nieskończonościowej”): niech n będzie dowolną liczbą naturalną, a X dowolnym zbiorem nieskończonym. Jeżeli rodzinę wszystkich n -elementowych podzbiorów zbioru X podzielimy na skończenie wiele części, to znajdzie się nieskończony podzbiór zbioru X , którego wszystkie n -elementowe podzbiory leżą w jednej i tej samej części podziału. Innym klasycznym twierdzeniem w tym duchu jest następujący rezultat należący do van der Waerdena: jeżeli zbiór liczb naturalnych pokolorujemy na skończenie wiele kolorów, to znajdziemy dowolnie długie jednokolorowe ciągi arytmetyczne. Mówiąc ogólnie, twierdzenia typu Ramseya stwierdzają, że jeżeli zbiór „duży” podzielony zostanie na „niewiele” części, to jedna z tych części musi być „duża”. Sens określeń „duży” i „niewiele” może być różnorodny, a różnorodność ta jest przyczyną powstania całej gamy twierdzeń typu Ramseya, od twierdzeń natury arytmetycznej do twierdzeń geometrycznych. W pracy należy skupić się na wybranych przez siebie faktach teorii Ramseya (np. twierdzenie Ramseya i van der Waerdena w wersji „skończonościowej” i „nieskończonościowej”, twierdzenie Hindmana, Baumgartnera, Halesa-Jewetta) omawiając ich dowody. Można wyszukać interesujące problemy omawianego typu wśród zadań olimpijskich. Można również skupić się szczególnie mocno na samych metodach dowodowych (indukcja, ultrafiltry, półgrupy) podając dla każdego z wybranych twierdzeń kilka różnych dowodów i omawiając podstawy, u których te metody leżą.

Literatura:

- [1] Aleksander Błaszczyk, Sławomir Turek, Teoria mnogości, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [2] Victor Bryant, Aspekty kombinatoryki, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
- [3] Witold Lipski, Wiktor Marek, Analiza kombinatoryczna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1986.

8. »Metoda niezmienników«

Opis:

Metoda niezmienników jest jedną z najefektywniejszych metod rozwiązywania problemów z matematyki dyskretniej oraz teorii gier. Załóżmy, że mamy dany pewien obiekt (układ figur na szachownicy, liczby w macierzy itp.) oraz grupę przekształceń, dozwolonych ruchów, za pomocą których możemy przejść z jednego stanu obiektu do drugiego. Jeżeli nasze zadanie polega na rozstrzygnięciu, czy możliwe jest przejście od stanu początkowego do zadanego stanu końcowego, to o ile w przypadku odpowiedzi pozytywnej wystarczy podać odpowiedni ciąg ruchów, o tyle w przypadku odpowiedzi negatywnej dobrym pomysłem jest znalezienie pewnej „funkcji stanu”, jakiejś właściwości układu, która nie zmienia się, niezależnie od tego, jakie ruchy wykonujemy. Jeżeli owa niezmiennicza właściwość w początkowym stanie różni się od tej odpowiadającej stanowi końcowemu, to żądana sekwencja ruchów na pewno nie istnieje. Na tym właśnie polega metoda niezmienników. Celem pracy byłoby zilustrowanie tej metody na kilku wybranych przykładach, których wiele można znaleźć w zbiorze [1], a także wśród zadań pojawiających się na Olimpiadzie Matematycznej [2]. Można spojrzeć na ten temat z punktu widzenia strategii wygrywających; w teorii wielu klasycznych gier matematycznych da się odnaleźć metodę niezmienników. Bardzo cenny byłby oczywiście własny, twórczy wkład, polegający np. na wybraniu jednego z problemów olimpijskich i znalezieniu jego ciekawych uogólnień. Patrząc na temat z nieco innej strony, zamiast szukać niezmienników można szukać „funkcji stanu”, których zmienność jest kluczem do rozwiązania danego zadania. Widać to świetnie na przykładzie zadania 15 z zawodów indywidualnych Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w Zwardoniu, 2002 (broшура dostępna na stronie internetowej [2]). Tutaj też znalezienie ciekawych uogólnień byłoby bardzo cenne.

Literatura:

- [1] Dániel Ch. Musztari, Przygotowanie do olimpiad matematycznych, Oficyna Wydawnicza Poligraficzna „Adam”, Warszawa 2002.
- [2] Strona internetowa Olimpiady Matematycznej: <http://www.om.edu.pl>

9. »AbstrAkcja«

Opis:

Abstrakcja jest pojęciem związanym z wieloma dziedzinami. Najczęściej łączymy je ze sztuką lub filozofią, ale pojęcie to występuje też w programowaniu i matematyce. W tej ostatniej jest ściśle połączone z pojęciem relacji równoważności, czyli takiej, która jest

zwrotna, symetryczna i przechodnia. Relacja o podanych własnościach dokonuje podziału zbioru w którym jest określona, na klasy abstrakcji (równoważności). W pracy należy podać zastosowania relacji równoważności, ponadto można rozwiązać kilka zadań z [1] lub [2].

Literatura:

- [1] H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, Warszawa, PWN, 1990.
- [2] W. Marek, J. Onyszkiewicz, Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach, Warszawa, PWN, 2000.

10. »Matematyka okiem plastyka«

Opis:

Czy mistrzowie sztuk pięknych świadomie czy nieświadomie stosowali matematykę w swoich pracach? Przyjrzyjmy się dziełom Fidiasza, Leonarda da Vinci, Pabla Picasso. Widzimy różne style, różne techniki. Zauważmy też, że wymienieni geniusze żyli w bardzo różnych czasach. Ten temat jest tematem dodatkowym - z racji jubileuszu XXX edycji Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków. Oczekujemy prac plastycznych związanych formą z matematyką. Można zastosować złotą proporcję, można wykorzystać spirograf, tanagram, można przygotować ciekawe kompozycje brył, można haftować, wyszywać malować, rzeźbić - ważne jest jedno praca musi być związana z matematyką niekoniecznie treścią ale konieczną formą. Jeżeli do pracy będzie dołączona część teoretyczna, pracę można zgłosić w dwóch kategoriach: plastycznej i matematycznej.

Literatura:

- [1] H. Balbierz, P. Pawlikowski, J. Pasławska, Matematyczne wyszywanki. Sztuka kreślenia nitką. Wydawnictwo Trifolia sp. z o.o. Warszawa 2003.
- [2] S. Kowal, Przez rozrywkę do wiedzy. Rozmaitości matematyczne., Wydawnictwa naukowo-Techniczne. Warszawa 1989.
- [3] W. Bieńko, Zygzykiem przez matematykę., Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych. Warszawa 1965.

11. »Figury magiczne«

Opis:

Kwadraty magiczne znane były Chińczykom i Hindusom przed paru tysiącami lat. Spotyka się amulety chińskie z kwadratami magicznymi, na których jeszcze nie ma cyfr, lecz są odpowiednie ilości nakłuć lub wydrążeń. W Europie pojawiły się w XV wieku, a Grek Moscopulus, wskazał pierwsze zasady ich zestawień. W późniejszych wiekach matematycy nadal interesowali się tym tematem. Kwadrat magiczny poświęcone są m.in. dwie prace Leonarda Eulera: „De quadratis magicis” oraz „Recherches sur une nouvelle especes de quarrés magiques”. Pierwszą z nich Euler przedstawił w Akademii St. Petersburg 17 października 1776 roku. Zaraz w pierwszym paragrafie wyjaśnia on, że kwadrat magiczny jest to taka figura, w której suma liczb w każdej kolumnie, w każdym wierszu oraz obu przekątnych jest równa. Euler uznawany jest przez wielu za prekursora popularnej obecnie gry Sudoku, która to oparta jest na kwadratach magicznych (a dokładniej kwadratach łacińskich). Warto poznać te tajemnicze figury, wśród których oprócz kwadratów znaleźć możemy magiczne koło, magiczny krzyż, magiczną piramidę, a nawet magiczną gwiazdę.

Literatura:

- [1] Z. Bobinski, P. Nodzyński, A. Swiatek, Kwadraty Magiczne, Miniatury Matematyczne 30, Aksjomat, 2010
- [2] Szczepan Jeleński, Lilavati, Wyd.PZWS, 1968
- [3] Szczepan Jeleński, Śladami Pitagorasa – rozrywki matematyczne, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1953
- [4] Andrzej Nowicki, Podróże po Imperium Liczb, users.mat.umk.pl/~anow/imperium/xyz05.pdf
- [5] Leonhard Euler, Investigations on a new type of magic square, <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/pages/E530.html>
- [6] Leonhard Euler, On magic squares, <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/pages/E795.html>
- [7] Jim Moran, The Wonders of Magic Squares, Random House Inc, , 1982
- [8] Clifford A. Pickover, The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars: An Exhibition of Surprising Structures across Dimensions, Princeton University Press, 2002

12. »Historia symboliki matematycznej«

Opis:

Obecnie używamy wielu symboli matematycznych, ale czy wiemy skąd się one wzięły? Dlaczego znakiem dodawania jest "+", a odejmowania "-"? Kiedy powstały pierwsze symbole matematyczne, jak one wyglądały i czy przypominały obecne? Na te wszystkie pytania, a także na wiele innych, jakie pojawiają się po drodze można poznać odpowiedzi, zagłębiając się w historię symboliki matematycznej. W czasie podróży wehikulem czasu do czasów starożytnych możemy natknąć się chociażby na manuskrypt Bakhshali, w którym to poznamy odpowiedź na pytanie: " Czy «+», znaczy «-»? "

Literatura:

- [1] Marek Kordos, Wykłady z historii matematyki, SCRIPT, 2006
- [2] Witold Więśław, Matematyka i jej historia, Wydawnictwo „Nowik”, 1997
- [3] Florian Cajori, A History of Mathematical Notations - Vol. I, II, Cosimo Classics, 2007

13. »Geometria fraktalna«

Opis:

W latach siedemdziesiątych XX wieku słynny francuski matematyk (urodzony w Warszawie) Benoit Mandelbrot, wprowadził do matematyki nowe pojęcie: fraktal. Czym właściwie jest ten obiekt? W literaturze można odnaleźć wiele różnych definicji opisujących fraktale, m.in że jest to obiekt nieskończenie samopodobny (podobny do swojej części), bądź też o "poszarpanej" budowie (stąd też nazwa fractus - złamany, poszarpany, ułamkowy). Oprócz wielu, bardzo interesujących własności matematycznych, obiekty fraktalne można również spotkać w otaczającym nas świecie: płatki śniegu, liście paproci, rzeki, kwiaty, czy też chmury. Zachęcam wszystkich do zapoznania się z tą, jakże ciekawą tematyką geometrii fraktalnej.

Literatura:

- [1] Kudrewicz Jacek, Fraktale i Chaos, 2007, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
- [2] H.O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe, Granice Chaosu Fraktale, tom 1 i 2, 2002, PWN
- [3] Piotr Pierański, Fraktale od geometrii do sztuki, 1992, Ośrodek Wydawnictw Naukowych
- [4] Michael Fielding Barnsley, Fractals Everywhere, 2000, Morgan Kaufmann Pub,
- [5] Benoit Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, 1982, New York:

14. »Paradoksy i sofizmaty«

Opis:

Rozważmy następujące zagadnienie: Uczeń wybrał sobie dwie różne liczby a oraz b , a ich sumę oznaczył przez $2c$

$$a + b = 2c$$

Obie strony pomnożył przez $(a - b)$:

$$(a - b)(a + b) = (a - b) \cdot 2c,$$

a stąd otrzymał

$$a^2 - b^2 = 2ac - 2bc.$$

Do obu stron równania dodał $b^2 + c^2 - 2ac$:

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2.$$

Z powyższego uzyskał:

$$(a - c)^2 = (b - c)^2,$$

a po spierwiastkowaniu:

$$a - c = b - c,$$

czyli

$$a = b$$

Gdzie tkwi błąd? Uczeń na początku wybrał dwie różne liczby, a na końcu otrzymał, że są one sobie równe.

Na powyższą zagadkę, a także wiele innych można poznać odpowiedź zagłębiając się w świat sofizmatów i paradoksów matematycznych. Poznaj tajemniczy świat, w którym nawet szybki, jak błyskawica Achilles, nie jest w stanie przegonić żółwia.

Literatura:

- [1] Zbigniew Bobiński,
Sofizmaty matematyczne. O podziale odcinka na równe części. Jak znaleźć punkty w nieskończoności?,
Wydawnictwo Aksjomat, 2008
- [2] Szczepan Jeleński, Lilavati, 1968, Wyd.PZWS
- [3] Szczepan Jeleński, Śladami Pitagorasa rozrywki matematyczne,
Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1953
- [4] W.N. Lange, Fizyczne paradoksy, sofizmaty i zajmujące zadania,
Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1966
- [5] Eugeniusz Żabski, Nowe spojrzenie na paradoksy i antynomie, 2005
- [6] Bryan Bunch, Mathematical Fallacies and Paradoxes, 2007, Dover Publications
- [7] Michael Clark, Paradoxes from A to Z, 2 edition, 2002, Routledge
- [8] David Darling, The Universal Book of Mathematics: From Abracadabra to Zeno's Paradoxes,
John Wiley & Sons, 2004
- [9] Martin Gardner, The Colossal Book of Mathematics, 2001, W. W. Norton & Company
- [10] R. M. Sainsbury, Paradoxes, 2009, Cambridge University Press

15. »Matematyczne modele i zmiany klimatu«

Opis:

Czy mamy się czego obawiać? Czy naprawdę działalność człowieka i emisja gazów cieplarnianych podowuje globalne ocieplenie? A może ocieplenie chwilowe naprawdę jest i jego niektóre skutki są niekorzystne ale jednak nie jest spowodowane przez działalność człowieka? Przecież klimat ziemski ocieplał się i oziębiał już wiele razy, w sposób całkowicie naturalny, zanim pojawił się człowiek. Czy teraz jest inaczej? W pracy można odpowiedzieć wykorzystując modele matematyczne na te i wiele podobnych pytań.

Literatura:

- [1] Brandt S., Analiza danych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- [2] Iribarne J. V., Cho H. R., Fizyka atmosfery, PWN Warszawa 1988
- [3] Koźuchowski K. (ed.), Meteorologia i klimatologia, PWN Warszawa 2005
- [4] Martyn D., Klimaty kuli ziemskiej, WN PWN Warszawa 1995
- [5] Retallack J. 1991, Podstawy meteorologii, IMGW, Warszawa
- [6] Schonwiese Ch.-D., Klimat i człowiek, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997
- [7] Kundzewicz Z.W., Kowalczak P. Zmiany klimatu i ich skutki, Wydawnictwo Kurpisz SA, Poznań 2008.

16. »Najstarsze modele ekologiczne«

Opis:

Jakie narzędzia matematyczne wykorzystywali ludzie wiele lat temu, by określić poziom zanieczyszczenia, zasięg terytorialny występowania gatunków zwierząt, rozwój ekosystemów, wpływ działalności człowieka na zmiany w środowisku? W pracy można opisać używane kiedyś modele ekologiczne. Można je również porównać ze współcześnie stosowanymi.

Literatura:

- [1] U. Foryś, Matematyka w biologii, Wydawnictwa Naukowo Techniczne Warszawa 2005,
- [2] J. Strzałko, T. Mossor – Pietraszewska, Kompendium wiedzy o ekologii, PWN, Warszawa – Poznań 1999.

17. »Symulowanie procesów biologicznych za pomocą automatów komórkowych«

Opis:

Automaty komórkowe są jedną z metod przestrzennej symulacji różnych zjawisk. Metoda automatów komórkowych nakłada stałe zasady przestrzenne, takie jak siatka komórek oraz określa reguły, które nakazują zmiany stanu komórki w oparciu o stan jej sąsiadów. Wraz z upływem czasu rozwijają się, przestrzenne wzorce, komórki stwierdzają zmianę na podstawie swoich sąsiadów, to zmienia warunki w następnych okresach i powstają kolejne zmiany. W pracy można pokazać przykłady zastosowań automatów komórkowych do symulacji różnych procesów biologicznych zachodzących w naszym środowisku.

Literatura:

- [1] U. Foryś, *Matematyka w biologii*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne Warszawa 2005,
- [2] Praca zbiorowa pod red. Lynna Arthura Steena, *Matematyka współczesna: dwanaście esejów*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne Warszawa, Warszawa 1983
- [3] A.D. Baxevanis, *Bioinformatyka*, PWN, Warszawa, 2005.

18. »Modele matematyczne w epidemiologii i immunologii«**Opis:**

Tworzenie matematycznych modeli w epidemiologii i immunologii odgrywa niezwykle doniosłą rolę. Mają one pomóc w przewidzeniu możliwych dróg rozwoju chorób i epidemii zanim one realnie nastąpią. W pracy można zająć się jednym wybranym prostym modelem i wskazać jego zastosowania

Literatura:

- [1] U. Foryś, *Matematyka w biologii*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne Warszawa 2005,
- [2] James D. Murray, *Wprowadzenie do biomatematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2006,
- [3] J. Uchmański *Klasyczna Ekologia Matematyczna*, PWN, Warszawa, 1992.
- [4] J.D. Murray, *Wprowadzenie do biomatematyki*, PWN, Warszawa, 2006.
- [5] A. Okubo, *Diffusion and ecological problems: Mathematical Models*, Springer, 1980.

19. »Wielkie katastrofy ekologiczne w liczbach«**Opis:**

W pracy można skupić się na największych katastrofach związanych z działalnością człowieka (np. awarie na platformach wiertniczych, awarie tankowców, skażenia przemysłowe, pożary) lub też na takich, na które człowiek nie ma wpływu, albo jest bezpośrednią ich przyczyną (największe trzęsienia ziemi, wybuchy wulkanów, huragany). Warto podać, zinterpretować i porównać dane liczbowe związane ze skutkami omawianych katastrof.

Literatura:

- [1] Internet.