XXVII Ogólnopolski Sejmik Matematyków

Propozycje zagadnień

I. »Niezmienniki topologiczne.«

Opis: *Niezmiennikiem topologicznym nazywamy własność zbioru, która nie ulega zmianie przy przekrztałceniu homeomorficznym. Homeomorfizm to funkcja różnowartościowa, ciągła i mająca ciągłą funkję odwrotną (czy istnieje funkcja ciągła mająca nieciągłą funkcję odwrotną?). Czy dowolne dwa odcinki są homeomorficzne? Czy brzeg kuli jest homeomofriczny z płaszczyzną? Jakie własności zbioru są niezmiennikami topologicznymi? Czy są nimi są np. domkniętość, zwartość, ograniczoność, własność punktu stałego?*

Literatura:

[1] R. Engelking, K. Sieklucki, Wstęp do topologii, PWN, Warszawa 1986,

[2] K. Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości i topologii, PWN, Warszawa 1977,

[3] R. Messer, P. Straffin, Topology Now!, Math. Assoc. of America 2006,

[4] R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste, tom I, PWN, Warszawa 1958.

II. »Nieprawdopodobieństwo.«

Opis: *Jaką grubość powinna mieć moneta, żeby prawdopodobieństwo upadnięcia na kant wynosiło $\frac{1}{3}$? W tym zadaniu poważny problem stanowi skonstruowanie adekwatnej przestrzeni probabilistycznej - idealnie zrobić się tego nie da, ale można próbować stworzyć jak najlepszy model. Przybliżoną odpowiedź można też uzyskać wykonując odpowiednią ilość doświadczeń. Istnieje wiele zadań z rachunku prawdopodobieństwa, w których możliwość różnorakiego opisu przestrzeni probabilistycznej może sprawić rozwiązującemu kłopot. Istnieją też zadania, których rozwiązania okazują się bardzo zaskakujące. W pracy możnaby spróbować niektóre z takich zadań dokładnie przeanalizować.*

Literatura:

[1] M. Fisz, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, Warszawa 1969.

[2] J. Jakubowski, R Sztencel, Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego, SCRIPT, Warszawa 2002,

[3] J. Jakubowski, R Sztencel, Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, SCRIPT, Warszawa 2004,

[4] J. Ombach , Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, IM AGH, Kraków 1997.

[5] A. Plucińska, E. Pluciński, Probabilistyka. Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 2000,

III. »Moje ulubione krzywe płaskie«

Opis: *W XVI wieku matematycy po inspiracje dla stworzenia rachunku różniczkowego sięgnęli do fizyki. Zainteresowanie matematycznym opisem przebiegu prostych zjawisk mechanicznych wzbogaciło matematykę o ogromny zbiór krzywych: tautochronę (krzywą, po której kulka stacza się w takim samym czasie niezalenie od miejsca położenia), brachistochronę (kształt najszybszego toru saneczkowego), taktrysę (tor zabawki ciągniętej przez dziecko idące po prostym krawężniku), krzywą łańcuchową (czyli kształt powieszonego na dwóch gwoździach łańcucha) i wiele, wiele innych. Okazało sie przy tym, że krzywe te mają jeszcze wiele nieoczekiwanych własności. Praca mogłaby skolekcjonować cechy szczególne jednej, bądź kilku taki krzywych.*

Literatura:

[1] Eugeniusz Niczyporowicz, Krzywe płaskie, PWN 1991.

[2] H.S.M. Coxeter, Wstęp do geometrii dawnej i nowej, Warszawa, 1967

IV. »Liczby pierwsze«

Opis: *Ile jest wszystkich liczb pierwszych ? Czy istnieją wzory, dzięki którym można wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze ? Jak rozłożone są liczby pierwsze w zbiorze liczb naturalnych ? Jakie istnieją efektywne metody stwierdzania czy dana liczba jest pierwsza ? Jaka jest największa znana liczba pierwsza i skąd to wiadomo ?*

Odpowiedzi na te i inne pytania mogą być treścią interesującej pracy.

Literatura:

[1] Wacław Sierpiński, Co wiemy i czego nie wiemy o liczbach pierwszych, BM 9, PZWS, 1961,

[2] Wacław Marzantowicz, Piotr Zarzycki, Elementarna teoria liczb, PWN, 2006

[3] Wacław Sierpiński, Teria liczb, PWN, Warszawa 1950

[4] Władysław Narkiewicz, Teoria liczb, PWN, Warszawa 2003

V. »Jak obliczyć sumę „nie do obliczenia”?«

Opis: *W różnorodnych działach matematyki, jak np. matematyka dyskretna czy szeroko pojęta analiza matematyczna, a także w pewnych zagadnieniach informatycznych, często występuje potrzeba obliczenia sumy postaci $\sum_{i=1}^{n} a_i$ dla danego ciągu liczbowego (a_n). Z programu szkolnego dobrze znane są wzory na tego typu sumy w przypadku, gdy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym lub geometrycznym. Okazuje się jednak, że istnieje szereg innych, znacznie bardziej subtelnych i pomysłowych metod, które pozwalają obliczać sumy z pozoru „nie do obliczenia”. Daje się mianowicie podać dokładne wzory na takie np. wyrażenia jak:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}, \qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{4k^2-1}.$$

Możliwymi do wykorzystania w tej problematyce metodami są m.in. przekształcenie Abela, interpretacja kombinatoryczna sum, metody związane z różniczkowaniem i całkowaniem, postać trygonometryczna liczb zespolonych i wzór Moivre'a. Omówienie tych zagadnień znaleźć można w podanej literaturze. Praca powinna zawierać dyskusję szeregu wybranych metod, a bardzo mile widziana byłaby próba samodzielnego stworzenia metody sumowania czy też próba uzyskania ciekawych uogólnień znanych metod.

Literatura:

[1] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, Matematyka konkretna, PWN, Warszawa 1998.

[2] Lev Kourliandtchik, Impresje liczbowe. Od cyfry do szeregu, Studium TUTOR, Toruń 2001.

[3] Zbigniew Palka, Andrzej Ruciński, Wykłady z kombinatoryki, część 1: Przeliczanie, WNT, Warszawa 1998.

[4] Henryk Pawłowski, Kółko matematyczne dla olimpijczyków, Turpress, Toruń 1994.

VI. »Twierdzenia typu Ramseya«

Opis: *Zgodnie z oczywistą i doskonale znaną* ZASADĄ SZUFLADKOWĄ*, jeżeli w n pudełkach rozmieścimy $n+1$ przedmiotów, to znajdzie się takie pudełko, które mieści co najmniej dwa przedmioty. Ten trywialny fakt stał się genezą dla szeregu pięknych i dalece nieoczywistych twierdzeń, z których jako pierwsze należy wymienić twierdzenie Ramseya (w wersji „nieskończonościowej”): niech n będzie dowolną liczbą naturalną, a X dowolnym zbiorem nieskończonym. Jeżeli rodzinę wszystkich n-elementowych podzbiorów zbioru X podzielimy na skończenie wiele części, to znajdzie się nieskończony podzbiór zbioru X, którego wszystkie n-elementowe podzbiory leżą w jednej i tej samej części podziału. Innym klasycznym twierdzeniem w tym duchu jest następujący rezultat należący do van der Waerdena: jeżeli zbiór liczb naturalnych pokolorujemy na skończenie wiele kolorów, to znajdziemy dowolnie długie jednokolorowe ciągi arytmetyczne. Mówiąc ogólnie, twierdzenia typu Ramseya stwierdzają, że jeżeli zbiór „duży” podzielony zostanie na „niewiele” części, to jedna z tych części musi być „duża”. Sens określeń „duży” i „niewiele” może być różnorodny, a różnorodność ta jest przyczyną powstania całej gamy twierdzeń typu Ramseya, od twierdzeń natury arytmetycznej do twierdzeń geometrycznych. W pracy należy skupić się na wybranych przez siebie faktach teorii Ramseya (np. twierdzenie Ramseya i van der Waerdena w wersji „skończonościowej” i „nieskończonościowej”, twierdzenie Hindmana, Baumgartnera, Halesa-Jewetta) omawiając ich dowody. Można wyszukać interesujące problemy omawianego typu wśród zadań olimpijskich. Można również skupić się szczególnie mocno na samych metodach dowodowych (indukcja, ultrafiltry, półgrupy) podając dla każdego z wybranych twierdzeń kilka różnych dowodów i omawiając podstawy, u których te metody leżą.*

Literatura:

[1] Aleksander Błaszczyk, Sławomir Turek, Teoria mnogości, PWN, Warszawa 2007.

[2] Victor Bryant, Aspekty kombinatoryki, WNT, Warszawa 1997.

[3] Witold Lipski, Wiktor Marek, Analiza kombinatoryczna, PWN, Warszawa 1986.

VII. »Enigma i inne takie«

Opis: *Jak złamano szyfr Enigmy? Czy trudność tego zadania wynikała tylko z tego, ze nie dysponowano wówczas odpowiednio szybkimi maszynami liczącymi? Jak długo łamano by ten kod przy użyciu współczesnych komputerów? Dlaczego współcześnie stosowane metody szyfrowania są tak trudne do złamania? Czy aby na pewno?*

Literatura:

[1] Krzysztof Gaj, Szyfr Enigmy. Metody złamania., Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 1989

[2] Andrew Hodges,
"ENIGMA - Życie i śmierć Alana Turinga" (tłum. W. Bartol), Prószyński, Warszawa, Poland, 2002

[3] Neal Koblitz, Wykład z teorii liczb i kryptografii, Warszawa, WNT 1995

[4] Neal Koblitz, Algebraiczne aspekty kryptografii, WNT, Warszawa 2000

[5] Władysław Kozaczuk, W kręgu Enigmy, KiW, Warszawa 1986

[6] Władysław Kozaczuk, Złamany szyfr "Enigma", MON, Warszawa 1985

[7] Marek Grajek "Enigma", **REBIS**, Warszawa 2007

VIII. »Algorytmy przybliżone«

Opis: *Jeśli na rozwiązanie dokładne jakiegoś palącego problemu musielibyśmy czekać kilka godzin, to może lepiej wybrać niekoniecznie dokładne rozwiązania, ale takie które uzyskujemy z zadowalająca dokładnością w ciągu ułamka sekundy? A co jeśli rozwiązanie dokładne miałoby zająć dni, miesiące, czy lata? Poza tym czy warto sie przejmować, że nasz algorytm się "pomylił", skoro szansa pomyłki jest mniejsza niż dwukrotne trafienie szóstki w totka?*

Literatura:

[1] Maciej M. Sysło, Narsingh Deo, Janusz S. Kowalik,
Algorytmy optymalizacji dyskretnej, PWN, Warszawa 1999

[2] D.E. Goldberg, Algorytmy genetyczne i ich zastosowania, WNT, 2003

[3] M. Zbigniew, Algorytmy genetyczne + struktury danych, WNT,

[4] Ryszard Zielinski, Metody Monte Carlo, Delta, 1975-6

IX. »Różne systemy numeracji«

Opis: *Spośród wielu stosowanych w ciągu wieków sposobów przedstawiania liczb zwyciężył w końcu dziesiętny system pozycyjny, chociaż jego wybór jest nieco przypadkowy. Czasami uważa się, że system dwunastkowy ma lepsze własności arytmetyczne, a w technice komputerowej większe zastosowanie znalazły systemy dwójkowy i szesnastkowy. Dlatego też warto poznać sposoby przedstawiania liczb całkowitych i rzeczywistych w różnych systemach numeracji i sposoby wykonywania operacji arytmetycznych przy poszczególnych przedstawieniach. Można przy tym zaobserwować różne ciekawe własności tychże przedstawień i sformułować interesujące uogólnienia własności przedstawienia dziesiętnego jak. n.p. cechy podzielności*

Literatura:

[1] R. Jajte, W. Krysicki, Z matematyką za pan brat, Iskry 1985

[2] (praca zbiorowa) Mozaika matematyczna, Wiedza Powszechna 1987

[3] W. Sierpiński, Arytmetyka teoretyczna, BM t. 7, PWN 1969

X. »Potęgi Steinerowskie, linie potęgowe«

Opis: Potęga punktu względem okręgu (potęga Steinerowska), a w szczególności linie potęgowe okręgów. Ich wykorzystanie we wcale niebanalnych zadaniach konstrukcyjnych daje zaskakująco proste rozwiązania, które bez pomocy lini potęgowych są bardzo trudne albo wręcz praktycznie nierozwiązywalne !

Literatura:

[1] I.I. Aleksandrov, Zbiór geometrycznych zadań konstrukcyjnych, PZWS 1854

[2] H.S.M. Coxeter, Wstęp do geometrii dawnej i nowej,r. X, Warszawa, 1967

[3] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, Geometry Revisited, 1967

[4] M. Stark, Geometria analityczna z wstępem do geometrii wielowymiarowej, PWN 1974

[5] A. Mostowski, M. Stark, Elementy algebry wyższej, BM 16

XI. »Metody konstrukcji figur magicznych«

Opis: Każdemu uczniowi zapewne jest znane pojęcie kwadratu magicznego. Istnieje wiele innych figur i brył magicznych takich jak np. magiczne sześciany, a ponadto są jeszcze kwadraty bimagiczne, multimagiczne, panmagiczne i wiele innych modyfikacji, wykorzystujące również liczby zespolone. Celem pracy może być podanie metod konstrukcji takich lub podobnych figur i brył. Obok przedstawienia znanych metod mile widziane będą własne propozycje służące konstrukcji figur magicznych

Literatura:

[1] Sz. Jeleński, Lilavati, WSiP, Warszawa 1992.

[2] Wikipedia `http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square`

[3] L. Euler, On magic squares, `http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0408/0408230v6.pdf`

XII. »Wokół nierówności Shapiro«

Opis: Niech n będzie liczbą naturalną, $x_1, \ldots, x_n$ takimi liczbami nieujemnymi, że $x_i + x_{i+1} > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$ (przyjmujemy $x_{n+1} := x_1$). Problem Shapiro polega na określeniu dla jakich n jest prawdziwa następująca nierówność:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Okazuje się, że dla $n \leqslant 13$ nierówność ta jest prawdziwa. Jest ona także prawdziwa dla $n = 15, 17, 19, 21, 23$, ale nie jest ona prawdziwa dla $n = 14, 16, 18, 20, 22$ i dla $n \geqslant 24$. Vladimir Drinfeld (laureat medalu Fieldsa z 1990 roku) udowodnił, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi słabsza wersja nierówności

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant \gamma\frac{n}{2},$$

gdzie $\gamma \approx 0,989$ jest pewną stałą. Dla $n = 3$ nierówność Shapiro nazywa się nierównością Nesbitta i posiada kilka elementarnych i pomysłowych dowodów. W pracy mogłyby się znaleźć dowody szczególnych przypadków nierówności Shapiro, przykłady zastosowań oraz ewentualne modyfikacje i uogólnienia wyjściowego problemu.

Literatura:

[1] J. Górnicki, Okruchy matematyki, PWN, Warszawa 1995.

[2] D. S. Mitrinović, Elementarne nierówności, PWN, Warszawa 1972.

[3] H. Lee, Topics in Inequalities - Theorems and Techniques,
`http://www.eleves.ens.fr/home/kortchem/olympiades/Cours/Inegalites/tin2006.pdf`

[4] T. J. Mildorf, Olympiad Inequalities, `http://web.mit.edu/tmildorf/www/`