

XXVI Ogólnopolski Sejmik Matematyków

Propozycje zagadnień

Temat 1. »NIETYPOWE FUNKCJE.«

Opis:

Funkcje, o których się uczymy w szkole, są bardzo porządne – z reguły ciągłe, różniczkowalne. Pojawia się wprawdzie funkcja: $x \mapsto |x|$, która ma jeden punkt, w którym nie ma pochodnej, ale czy potrafisz sobie wyobrazić funkcję, która “składa się” z samych takich “szpiców”, tzn. która jest ciągła, ale nigdzie nie ma pochodnej. Taką brzydką funkcję można otrzymać, jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji bardzo “gładkich”, bo nieskończenie wiele razy różniczkowalnych. Funkcja zdefiniowana na odcinku, która ma pochodną równą zero, to funkcja stała. A czy wiesz, że istnieje funkcja ciągła i rosnąca, która jest prawie wszędzie różniczkowalna i której pochodna tam gdzie istnieje jest równa zero? Ba, nawet istnieje funkcja ciągła, ściśle rosnąca, określona na odcinku, która ma pochodną prawie wszędzie równą zero. Takie i inne przykłady nietypowych (czyżby?) funkcji znaleźć można m.in. w podanych książkach. A może wymyślisz własne przykłady funkcji o zaskakujących własnościach?

Literatura:

- [1] B.R. Gelbaum, J.M.H. Olmsted, THEOREMS AND COUNTEREXAMPLES IN MATHEMATICS, Problem Books in Mathematics, Springer Verlag
- [2] A.B. Kharazishvili, STRANGE FUNCTIONS IN REAL ANALYSIS, Pure and applied mathematics, A series of Monographs and textbooks, Mercel Dekker, Inc.

Temat 2. »WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII JEDNOWYMIAROWYCH DYSKRETNÝCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH.«

Opis:

Mając daną ciągłą funkcję $f: I \rightarrow I$, możemy badać, jak zachowuje się trajektoria jakiegoś punktu $x \in I$, tj. ciąg kolejnych iterat: $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$. Ciąg taki może zbiegać do jakiegoś punktu (co o takiej granicy można powiedzieć?), może mieć kilka granic częściowych, a może chaotycznie krążyć po odcinku I . Badanie takich zachowań, związków między nimi, jest ciekawe nawet dla tak pozornie nieskomplikowanych funkcji, jak funkcje kwadratowe $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$. Zachęcam do zapoznania się z pierwszym rozdziałem pozycji [1] i rozwiązywania zadań tam zawartych oraz opisanie wybranych zagadnień tam omawianych. Ciekawe informacje na temat chaosu w jednowymiarowych układach dynamicznych można znaleźć także w podanej literaturze.

Literatura:

- [1] R.L. Devaney, AN INTRODUCTION TO CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1987
- [2] A.N. Sharkovsky, S.F. Kolyada, A.G. Sivak, V.V. Fedorenko, DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL MAPS, Kluwer Academic Publisher, 1997,
- [3] L. Block, W.A. Coppel, DYNAMICS IN ONE DIMENSION, Springer Lecture Notes in Mathematics 1513(1992).

Temat 3. »GEOMETRIA W GEOGRAFII«

Opis:

Dwie starożytne nauki geografia (opisywanie Ziemi) i geometria (mierzenie ziemi) obecnie nauczane są w szkole jako różne i dosyć odległe przedmioty. A jednak łączy je znacznie więcej niż tylko podobna nazwa i ten związek może być tematem interesującej pracy konkursowej. Warto zastanowić się nad problemami geometrycznymi pochodzącymi z geografii. Na przykład, jak daleko jest do widnokregu lub jakie jest pole powierzchni czworokątnego obszaru ograniczonego dwoma południkami i dwoma równoleżnikami. Czy po przejściu 100 km w kierunku zachodnim oddaliliśmy się od punktu wyjścia o 100 km? Czy samolot lecący wzdłuż boku "kwadratu" po 500 km kolejno na północ, wschód, południe i zachód powróci do miejsca startu i czy odpowiedź zależy od wyboru punktu początkowego? Bardziej złożonym zadaniem jest wyznaczenie odległości pomiędzy dwoma punktami o danych współrzędnych geograficznych. Czy odległość przebyta przez samolot lecący najkrótszą drogą z jednego punktu do drugiego w zauważalny sposób zależy od wysokości lotu? Zadaniem o znaczeniu praktycznym jest określenie miejsca na widnokregu (azymutu) wschodu (zachodu) słońca np. w dniach równonocy (wiosennej i jesiennej) oraz przesilen (zimowego i letniego). Kompleksowym rozwiązaniem tego problemu może być program komputerowy, który na podstawie daty i współrzędnych geograficznych obliczy azymut i czas (godz. i min.) wschodu i zachodu słońca w danym miejscu i dniu. Mile widziane będą również propozycje innych ciekawych problemów, których rozwiązanie wymaga uwzględniania kulistości Ziemi. Praca powinna zawierać definicje stosowanych pojęć (np. współrzędne geograficzne, strony świata) oraz założenia upraszczające m. in. doskonała kulistość Ziemi, brak przeszkód terenowych itp. Każdy problem powinien być dokładnie sformułowany i rozwiązany z zachowaniem wymagań ścisłości matematycznej. Geometryczne problemy geografii rzadko dyskutowane są w powszechnie dostępnych podręcznikach. Dlatego autor będzie miał okazję wykazać się umiejętnością samodzielnego rozwiązywania niestandardowych zadań. Wiedza niezbędna do podjęcia tego tematu jest rozproszona w podręcznikach poświęconych geometrii, trygonometrii, astronomii oraz geografii.

Literatura:

- [1] W. Kryszewski, H. Pisarewska, T. Świątkowski, Z GEOMETRIĄ ZA PAN BRAT, Akapit Press, 2000.
- [2] F. Leja, GEOMETRIA ANALITYCZNA, BM 14, PWN, 1972.
- [3] E. Rybka, ASTRONOMIA OGÓLNA, 1983

Temat 4. »GEOMETRIA NA BRYŁACH«

Opis:

W matematyce dobrze znane jest pojęcie GEOMETRII ELIPTYCZNEJ, zwanej inaczej GEOMETRIĄ SFERYCZNĄ. Polega ona na tym, że uprawiamy geometrię nie na płaszczyźnie, a na powierzchni powierzchni sfery, przyjmując jako odcinki najkrótsze linie łączące dwa dane punkty. Okazuje się, że taka geometria w istotny sposób różni się od klasycznej. Pole trójkąta wyraża się zupełnie innym wzorem, suma kątów w trójkącie nie jest zawsze taka sama, istnieją tzw. dwukąty.

Celem pracy ma być samodzielne zbadanie przez ucznia geometrii uprawianej w analogiczny sposób na dowolnie wybranym wielościanie, np. na jednej z tzw. brył platońskich. Przykładowo, można zbadać trójkąty w tej geometrii. Dodatkowo, uczeń może zilustrować uzyskane rezultaty programem komputerowym.

Temat wymaga od autora znajomości geometrii na elementarnym poziomie, trochę cierpliwości i rozwiniętej wyobraźni przestrzennej. W szczególności, wydaje się on być atrakcyjny również dla młodszych uczniów.

Uwaga: na wielościanie nie należy oczekiwać równie eleganckich rezultatów jak te, które zachodzą na płaszczyźnie lub na sferze. Doceniana jednak jest samodzielność i oryginalność wykonanej pracy.

Literatura:

- [1] K. Ciesielski, Z. Pogoda, BEZMIAR MATEMATYCZNEJ WYOBRAŹNI.
- [2] M. Kordos, O RÓŻNYCH GEOMETRIACH.
- [3] W. Krywicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, Z GEOMETRIĄ ZA PAN BRAT.
- [4] http://pl.wikipedia.org/wiki/Geometria_eliptyczna

Temat 5. »DOWODZENIE NA RÓŻNE SPOSOBY«**Opis:**

W matematyce często zdarza się, że odkrycie pewnego faktu zajmuje bardzo wiele czasu, ale kiedy już zostanie udowodnione okazuje się, że można je uzasadnić łatwiej, ciekawiej lub jest wnioskiem z pozornie innych twierdzeń. Jednym z klasycznych przykładów jest twierdzenie Pitagorasa - kilkanaście dowodów można znaleźć np. w [1]. Praca z tego tematu mogłaby zawierać różne dowody wybranego twierdzenia z zakresu matematyki szkolnej lub twierdzeń związanych z zainteresowaniami autora. Inspiracji w wyborze twierdzeń można szukać np. w czasopiśmie THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY wybierając artykuły dostosowane do poziomu wiedzy autora. W trakcie redagowania pracy warto położyć nacisk na oryginalność zarówno twierdzeń jak i dowodów.

Literatura:

- [1] Sz. Jeleński, ŚLADAMI PITAGORASA, PZWS, Warszawa 1961.

Temat 6. »PEWNIK ARCHIMEDESA«**Opis:**

Sformułowanie, związki z innymi aksjomatami geometrii. Pewnik Archimedes a lemat Eudoksosa o wyczerpywaniu. Inne zastosowania w geometrii. Przykład geometrii niearchimedesowej Hilberta. Przykłady “sytuacji niearchimedesowych” w innych działach matematyki — analizie, algebrze, teorii zbiorów.

Literatura:

- [1] J. Mioduszewski, CIĄGŁOŚĆ. SZKICE Z HISTORII MATEMATYKI, ..., 19...
- [2] K. Borsuk, W.Szmielew, PODSTAWY GEOMETRII, , 19...
- [3] Kutuzow, GEOMETRIA ŁOBACZEWSKOWO, PWN, Warszawa 1968.
- [4] Bołtiański, TRETIA PROBLEMA GILBERTA, PWN, Warszawa 1968.

Temat 7. »PEWNIK WYBORU«**Opis:**

Matematycy od lat toczą spory o to, czy wolno nam używać pewnika wyboru do dowodzenia twierdzeń. Dzisiaj chyba już niewielu jest takich, którzy by “nie wierzyli” w pewnik wyboru. Warto napisać, co mówi pewnik wyboru oraz jego równoważniki. Warto także wskazać jego (czasem zaskakujące) implikacje.

Literatura:

- [1] J. Musielak, WSTĘP DO MATEMATYKI, PWN, Warszawa 1970,
- [2] H. Rasiowa, WSTĘP DO MATEMATYKI WSPÓŁCZESNEJ, PWN, Warszawa 1984,
- [3] K. Kuratowski, WSTĘP DO TEORII MNOGOŚCI I TOPOLOGII, PWN, Warszawa 1972.
- [4] T. Jech, THE AXIOM OF CHOICE, North-Holland, 1973.
- [5] J. Rubin, H. Rubin, EQUIVALENTS OF THE AXIOM OF CHOICE, North-Holland, 1985.
- [6] P. Howard, J. Rubin, CONSEQUENCES OF THE AXIOM OF CHOICE, AMS 1998.

Temat 8. »RODZAJE ZBIEŻNOŚCI FUNKCJI«

Opis: Wiemy mniej więcej, co to znaczy, że ciąg funkcji f_n jest zbieżny do jakiejś funkcji f – w każdym punkcie x ciąg $f_n(x)$ zbiega do $f(x)$. Żeby zbieżność była jednostajna, potrzeba założyć, że ciągi te zbiegają w podobnym tempie. Łatwo podać przykład funkcji zbieżnej punktowo, która nie jest zbieżna jednostajnie. Okazuje się, że jest o wiele więcej rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych. Ciekawe jest badanie zależności pomiędzy nimi zachodzącymi.

Literatura:

- [1] W. Rudin, PODSTAWY ANALIZY MATEMATYCZNEJ, PWN, Warszawa 1998,
- [2] R. Sikorski, FUNKCJE RZECZYWISTE, T.I, PWN, Warszawa 1958,
- [3] W. Kołodziej, ANALIZA MATEMATYCZNA, PWN, Warszawa 1979.

Temat 9. »CZY UŁAMKI PROSTE SĄ PROSTE?«

Opis: Ułamkiem prostym nazywamy ułamek o liczniku jeden i mianowniku, który jest liczbą naturalną. Powstaje pytanie, kiedy dany ułamek można przedstawić w postaci sumy dwóch, trzech lub więcej ułamków prostych. Kolejne pytanie dotyczy rozkładu danego ułamka na sumy i różnice ułamków prostych. Ciekawy też jest problem jak wyglądają zbiory wszystkich liczb mających takie przedstawienie.

Pracę można wzbogacić o przykłady metod znajdowania takiego rozkładu. Zachęcamy również autora do przyjrzenia się podobnym zagadnieniom (np. inne postacie rozkładu danego ułamka).

Literatura:

- [1] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, MATEMATYKA KONKRETNA, PWN, Warszawa 1996.
- [2] K.A. Ross, Ch.R.B. Wright, MATEMATYKA DYSKRETNA, PWN, Warszawa 1996.
- [3] W. Sierpiński, O ROZKŁADACH LICZB WYMIERNYCH NA UŁAMKI PROSTE, PWN, Warszawa 1957.

Temat 10. »A TAKA PORZĄDNA FUNKCJA ...«

Opis: Rozważmy funkcję $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ daną wzorem $f(x) = 2x$, dla x z przedziału $[0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = 2 - 2x$, dla x z przedziału $[\frac{1}{2}, 1]$. Bardzo prosta i “porządna” funkcja. Pomyślmy teraz o trajektoriach poszczególnych punktów, czyli o ciągach: $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$. Na przykład trajektoria punktu $\frac{2}{3}$ to: $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \dots$. Innymi słowy, $\frac{2}{3}$ to punkt stały tego przekształcenia, czyli inaczej punkt okresowy rzędu 1. Trajektoria punktu $\frac{2}{5}$ to: $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots$. Jest to punkt okresowy rzędu 2. Czy wiesz, że w tym prostym przekształceniu dla dowolnej liczby naturalnej n można znaleźć punkty okresowe rzędu n ? Są tam też takie punkty, których trajektorie tworzą ciągi różnowartościowe. Są tam trajektorie gęste w odcinku $[0, 1]$. Są też takie punkty x , dla których zbiór graniczny $\omega(x, f)$, czyli zbiór wszystkich granic częściowych trajektorii x jest równy całemu odcinkowi $[0, 1]$. Chaotyczność tego odwzorowania widac w jeszcze jednym twierdzeniu: istnieją takie domknięte rozłączne podzbiory X_0 i X_1 odcinka $[0, 1]$ oraz taka liczba naturalna m , że $g = f^m$ ma własności: $g(X_0 \cup X_1) \subset X_0 \cup X_1$; dla każdego ciągu $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ zer i jedynek istnieje taki punkt $x \in X_0 \cup X_1$, że $g^k(x) \in X_{\alpha_k}$.

Jest jeszcze wiele innych zagadnień związanych z badaniem trajektorii punktów różnych odwzorowań odcinka w siebie. Autor może wybrać niektóre z nich i je omówić, przedstawić, co zaciekało go w **Teorii Iteracji**.

Literatura:

- [1] L.S. Block, W.A. Coppel, DYNAMICS IN ONE DIMENSION, Lecture Notes in Mathematics 1513, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992,
- [2] G. Targonski, TOPICS IN ITERATION THEORY, Studia Mathematica Script 6, Vandenhoech&Ruprecht in Gottingen, 1981

Temat 11. »ZADANIE Z PLANIMETRII«

Opis:

Zadania z planimetrii mają często wiele różnych rozwiązań. Czternaście rozwiązań czeskiego zadania publikowanych było w polskim czasopiśmie *Matematyka*, 5(2004) str. 292-295, 1(2005) str. 52 i 5(2005) str. 50-51.

Takim zadaniem jest także zadanie nr 3 z polskiej 50. Olimpiady Matematycznej z lat 1998/99 z zawodów stopnia pierwszego. W *Sprawozdaniu* z tej Olimpiady przedstawiono cztery rozwiązania tego zadania, choć znanych jest jeszcze około dziesięciu innych rozwiązań. Należy znaleźć jak najwięcej istotnie różnych rozwiązań od podanych, wykorzystujących inne pomysły i twierdzenia - im więcej tym lepiej.

Jednym z możliwych jest zawsze rozwiązanie z użyciem geometrii analitycznej, dlatego nie należy go zamieszczać w pracy.

Może znasz inne zadanie z planimetrii (na poziomie olimpiady matematycznej), które również można rozwiązać na wiele różnych sposobów? Taki problem jest podwójnie trudny: polega na wybraniu odpowiedniego zadania oraz znalezieniu jak największej ilości różnych rozwiązań tego zadania.

Literatura:

- [1] J. Kalinowski, ZBIÓR ZADAŃ Z CZESKICH I SŁOWACKICH OLIMPIAD MATEMATYCZNYCH, Oficyna Wydawnicza - Poligraficzna "Adam", Warszawa 2002.