

XXIX Ogólnopolski Sejmik Matematyków

(Propozycje zagadnień)

1. »LICZBY CATALANA.«

Opis:

Rozważmy następującą sytuację: Wędrowiec, który wybrał się w podróż dookoła świata, spotyka na swojej drodze bankierów i rozbójników. Każdy napotkany bankier daje wędrowcowi jedną sztabkę złota, natomiast napotkany rozbójnik żąda za uwolnienie wędrowca jednej sztabki złota okupu.

Pokaż, że przy dowolnym rozmieszczeniu $n+1$ bankierów i n rozbójników, wędrowiec może tak wybrać początek swojej podróży, że będzie mógł zapłacić okup podczas każdego spotkania z rozbójnikiem. Ponadto wykaż, że istnieje dokładnie jeden taki punkt (tzn. pierwszy bankier), że jeśli wędrowiec rozpocznie podróż od tego punktu, to w każdym momencie swojej podróży będzie miał co najmniej jedną sztabkę złota.

Zadanie powyższe, na pozór skomplikowane, jest całkiem proste jeśli zaznajomimy się bliżej z liczbami Catalana oraz Lematem Raneya (patrz [1]).

Liczby Catalana bardzo pomagają w rozwiązaniu również innych, ciekawych zadań, np.:

Bilety do kina są w cenie 5 złotych. Spośród stu osób, które zamierzają zakupić bilet połowa dysponuje monetą 5-cio złotową, a pozostali tylko banknotem 10-cio złotowym. Zakładamy, że w kasie kina nie ma żadnych pieniędzy i wszyscy kupują po jednym bilecie. Ile jest sposobów ustawienia kolejki w taki sposób, że żadna z osób nie będzie musiała czekać na wydanie reszty?

Liczby Catalana, oprócz tego, że rozwiązują wiele problemów, mogą również posłużyć do zliczania wielu obiektów, które na pierwszy rzut oka są ze sobą nie związane, np. fryz, drzew binarnych, gór, uścisków dłoni i wielu innych. Jak liczby Catalana pomagają w rozwiązaniu zadania o wędrowcu i problemu z kolejką? Gdzie i jak wykorzystuje się Lemat Raneya? Co, jak i dlaczego można zliczać za pomocą liczb Catalana?

Literatura:

- [1] Graham, Knuth, Patashnik, **CONCRETE MATHEMATICS**,
- [2] Conway, Guy, **KSIĘGA LICZB**,
- [3] Pałka, Ruciński, **WYKŁADY Z KOMBINATORYKI**.

2. »ZBIORY WYPUKŁE.«

Opis:

Czy przekrój zbiorów wypukłych zawsze jest zbiorem wypukłym? A suma? Znalezienie odpowiedzi na podobne pytania powinno okazać się interesujące. Warto też zastanowić się np. nad pojęciem wypukłej otoczki (można ją zdefiniować na wiele sposobów) oraz jej własnościami. Pojęcia te mają wiele zastosowań – można spróbować opisać wybrane z nich.

Literatura:

- [1] Moszyńska, M., **GEOMETRIA ZBIORÓW WYPUKŁYCH**, WNT, Warszawa 2009.
- [2] Webster, R., **CONVEXITY**, Oxford University Press, New York 1994.

3. »JAK TO SIĘ ZACZEŁO - WYRYWKI Z HISTORII MATEMATYKI.«

Opis:

Jakie odkrycia najbardziej wpłynęły na rozwój matematyki. Chodzi o subiektywny wybór kilku najważniejszych momentów. Warto spróbować wyjaśnić te przełomowe twierdzenia oraz ich znaczenie. Można też zastanowić się, jak bez nich potoczyłaby się historia matematyki.

Literatura:

- [1] Kordos, M.,
WYKŁADY Z HISTORII MATEMATYKI, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994.
- [2] Ifrah, G., DZIEJE LICZBY CZYLI HISTORIA WIELKIEGO WYNAZKU,
Zakład Narodowy im. Ossolińskich - Wydawnictwo, Wrocław 1990.
- [3] Stewart, I.,
OSWAJANIE NIESKOŃCZONOŚCI. HISTORIA MATEMATYKI, Prószyński i S-ka, Warszawa 2009.

4. »ILE INFORMACJI JEST W INFORMACJI?«

Opis:

Od czego zacząć? Takie pytanie stawia sobie badacz starożytnych inskrypcji i kryptolog rozpoczynający łamanie nieznanego szyfru. Wobec takiego problemu stanęliby również poszukiwacze cywilizacji pozaziemskich, gdyby udało się zarejestrować sygnały wyróżniające się w radiowym szumie kosmosu. Pierwszą czynnością w takich przypadkach z pewnością jest poznanie struktury badanego kodu. Pomocne są metody bazujące na statystyce, takie jak entropia, analiza częstości, korelacje itp. Dzięki nim można wstępnie odróżnić przypadkowy ciąg znaków od kodu niosącego informację, czasem można rozpoznać w jakim języku napisany jest tekst zaszyfrowany, czy informacja została zakodowana w sposób "naturalny" lub czy została skompresowana. Praca konkursowa może zawierać opis takich metod ale powinna również zawierać własne pomysły, wyniki obliczeń i eksperymentów zaprojektowanych i wykonanych przez autora pracy. Warto skorzystać z materiałów pomocniczych do tego tematu dostępnych na www.*****.pl.

Literatura:

- [1] Robling, D., Denning, E., KRYPTOGRAFIA I OCHRONA DANYCH, WNT, 1992.
- [2] Drozdek A., WPROWADZENIE DO KOMPRESJI DANYCH, WNT 2007.
- [3] Stinson, D. R., KRYPTOGRAFIA W TEORII I W PRAKTYCE, WNT 2005.
- [4] internet.

5. »PRAWIE POPRAWNE „DOWODY” SŁYNNYCH HIPOTEZ.«

Opis:

W matematyce jest sporo nierozwiązanych do tej pory problemów. Zrozumienie większości z nich wymaga dosyć dużej wiedzy spoza zakresu szkolnej matematyki, jest jednak kilka hipotez, których sformułowanie będzie jasne nawet dla ucznia gimnazjum. Należą do nich min. hipoteza Goldbacha, mówiąca o tym, że każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych, a także hipoteza Collatza, znana też jako problem $3n + 1$, zakładająca, że jeśli weźmiemy dowolną liczbę naturalną n , podzielimy ją przez 2 w przypadku gdy jest parzysta lub zastąpimy przez $3n + 1$ w przypadku gdy jest nieparzysta, dla uzyskanego wyniku tą procedurę będziemy powtarzać, to w końcu osiągniemy liczbę 1.

Wielu matematyków próbowało rozwiązać któryś z tych dwóch problemów, jednak jak dotąd nikt nie podał poprawnego dowodu, zawsze w rozumowaniach pojawiała się luka. Większość poważnych ataków na te hipotezy wykorzystuje zaawansowaną aparaturę matematyczną, jednak ze względu na ich elementarne sformułowania można odnieść wrażenie, że również ich dowód musi być krótki i prosty. W związku z tym zdarza się, że swoich sił na tym polu próbują nawet osoby bez wykształcenia matematycznego. W Internecie krąży dużo takich elementarnych „dowodów”, jednak najprawdopodobniej w każdym z nich jest jakaś usterka. Można nawet znaleźć (np. na arXiv.org) krótką pracę, w której autor uzasadnia, że dowód hipotezy Collatza, gdyby istniał, musiałby mieć nieskończoną długość, a więc hipotezy tej nikt nigdy nie udowodni.

Cel pracy sejmikowej na ten temat to wybranie jednej z hipotez, znalezienie przy pomocy wyszukiwarki internetowej jednego lub kilku jej elementarnych „dowodów” i przeprowadzenie ich analizy eksponującej pomysły autora na atak problemu oraz jasno wskazujący luki w dowodzie. Możliwe też jest, że badane rozumowanie jest całkowicie poprawnym dowodem, ale innego, dużo słabszego twierdzenia.

Uwaga:

temat pracy daje autorowi dużą swobodę w doborze treści oraz formy pracy, jednak wymagać może pewnego wyczucia matematycznego oraz umiejętności przeprowadzenia selekcji najbardziej interesującego materiału spośród masy rzeczy mało ciekawych.

Należy pamiętać o podawaniu referencji do wszystkich materiałów, z których korzystamy przy pisaniu pracy!

Literatura:

[1] http://pl.wikipedia.org/wiki/Problem_Collatza

[2] <http://www.matematyka.pl/137128.htm>

[3] <http://occampress.com>

6. »ZANIM POWSTAŁ KALKULATOR.«**Opis:**

Umiejętność sprawnego i szybkiego liczenia była w cenie zawsze. Jak radzono sobie z tym dawniej zanim wynaleziono kalkulator? Zapraszam do pracy miłośników historii matematyki tych których fascynuje starożytność oraz tych którzy chętnie poznają jak z rachunkami radził sobie ich dziadek używając suwaka logarytmicznego.

Literatura:

[1] Kordos M., **WYKŁADY Z HISTORII MATEMATYKI**, Script, Warszawa 2005,

[2] Wiesław W., **MATEMATYKA I JEJ HISTORIA**, Wyd. NOWIK, Opole 1997,

[3] (pod red.) Januszkiewicz, A.P., **HISTORIA MATEMATYKI**, PWN, Warszawa 1976.

7. »BAŁAGAN KONTRA PORZĄDEK.«**Opis:**

Relacje to dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów. Relacje posiadające określone własności dzielimy na klasy. Najbardziej znane, to relacje zwrotne, symetryczne, czy przechodnie. W rodzinie relacji tak jak w rodzinie zbiorów wykonujemy działania sumy, iloczynu, czy wyznaczania relacji odwrotnej, a ponadto tu możemy wyznaczyć złożenie relacji. W pracy oczekuję ciekawych przykładów relacji oraz odpowiedzi na pytanie: czy wymienione wyżej działania są działaniami wewnętrznymi w kilku wybranych klasach.

Literatura:

[1] H. Rasiowa, **WSTĘP DO MATEMATYKI WSPÓŁCZESNEJ**, PWN, Warszawa, 1990.

[2] Z. Moszner, **O TEORII RELACJI**, WSiP, Warszawa, 1974.

[3] J. Cichoń,

WYKŁADY ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2003.

[4] J.A. Szrejder, **RÓWNOŚĆ, PODOBIENSTWO, PORZĄDEK**, WNT, Warszawa, 1975.

8. »MATEMATYKA DO WZIĘCIA W RĘKĘ.«**Opis:**

Wiele pojęć matematyki da się przedstawić jako materialne obiekty, których można dotknąć, obejrzeć z różnych stron itd. To nie tylko wielościany i wstęga Möbiusa. Można np. wyszydełkować butelkę Kleina, z taśmy papierowej można precyzyjnie skonstruować wszystkie (nie tylko konstruowalne cyrklem i linijką!) wielokąty foremne, można wykonać druciane przybliżenie krzywej Sierpińskiego, albo płatką Kocha itp.

Wykonaj i zaprezentuj swoją kolekcję. Encyklopedią takich projektów jest książka [1]

Literatura:

[1] H.M. Cundy i A.P. Rollet **MODELE MATEMATYCZNE**, PWN, 1967