

PROPOZYCJE ZAGADNIEŃ

na

XXIII Ogólnopolski Sejmik Matematyków

1 Zadanie z planimetrii

Zadania z planimetrii mają często wiele różnych rozwiązań. Czternaście rozwiązań czeskiego zadania publikowanych było w polskim czasopiśmie *Matematyka*, 5(2004) str. 292-295, 1(2005) str. 52 i 5(2005) str. 50-51.

Takim zadaniem jest także zadanie nr 3 z polskiej 50. Olimpiady Matematycznej z lat 1998/99 z zawodów stopnia pierwszego. W *Sprawozdaniu* z tej Olimpiady przedstawiono cztery rozwiązania tego zadania, choć znanych jest jeszcze około dziesięciu innych rozwiązań. Należy znaleźć jak najwięcej istotnie różnych rozwiązań od podanych, wykorzystujących inne pomysły i twierdzenia - im więcej tym lepiej.

Jednym z możliwych jest zawsze rozwiązanie z użyciem geometrii analitycznej, dlatego nie należy go zamieszczać w pracy.

Może znasz inne zadanie z planimetrii (na poziomie olimpiady matematycznej), które również można rozwiązać na wiele różnych sposobów? Taki problem jest podwójnie trudny: polega na wybraniu odpowiedniego zadania oraz znalezieniu jak największej ilości różnych rozwiązań tego zadania.

[1] J. Kalinowski, *Zbiór zadań z czeskich i słowackich olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawnicza - Poligraficzna "Adam", Warszawa 2002.

2 Liczby gradowe

Wyberzmy dowolną liczbę naturalną n i postępujemy z nią następująco: jeśli n jest parzyste, to dzielimy je przez 2, a jeśli nie, to mnożymy przez 3 i dodajemy 1. Następnie powtarzamy całą procedurę z uzyskaną liczbą i tak dalej. Na przykład, jeśli wybierzemy $n = 3$, to otrzymamy ciąg 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, ... Możemy zauważyć, że w przypadku każdej wybranej przez nas liczby początkowej n , ciąg zbudowany tak jak powyżej w końcu wpadnie w pętlę ..., 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Praca mogłaby zawierać próbę dowodu tego faktu (np. dla szczególnych typów liczb) lub odpowiedzieć na pytanie co się stanie, jeśli w konstrukcji ciągu zamienimy pewne stałe, np. zamiast dzielić przez 2 oraz mnożyć przez 3 i dodawać 1 będziemy dzielić przez 3 liczby podzielne przez 3, a niepodzielne mnożyć przez 2 i dodawać 4.

Literatura:

- [1.] M. E. LINES, *Liczby wokół nas*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995.

3 Trochę teorii miary

Autorzy prac mogliby się zmierzyć między innymi z zagadnieniami takimi jak:

dokładne zdefiniowanie miary, udowodnienie wybranych własności miary, omówienie wybranych rodzajów miar, zdefiniowanie całki względem miary. Dobrze, aby praca nie zawierała

wszystkich znalezionych przez autora wiadomości na temat miary, ale szła w jakimś jednym kierunku.

Literatura:

- [1.] ŁOJASIEWICZ, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*.
- [2.] KOŁODZIEJ, *Analiza matematyczna*.
- [3.] HALMOS, *Measure theory*.

4 O teorii wymiaru

W pracy na ten temat można by zawrzeć intuicje związane z pojęciem wymiaru, przedstawić kilka wymiarów, np. pokryciowy, duży i mały indukcyjny, Hausdorffa, fraktalny i inne, porównania, ciekawe przykłady, również takie, dla których intuicje zawodzą i dla których różne wymiary dają różne wyniki...

Literatura:

- [1.] R. DUDA, *O pojęciu wymiaru*, Biblioteczka Matematyczna.
- [2.] R. ENGELKING, *Teoria wymiaru*, BM tom 51.

5 Zbiory wypukłe

„Interesuje mnie wszystko, co jest wypukłe” - miał powiedzieć wybitny matematyk Herman Minkowski po odkryciu głębokich związków dla zbiorów wypukłych (cytat za książką K. Maurina „Analiza. Część I. Elementy”, PWN Warszawa 1977). Jeśli coś było interesujące dla Minkowskiego, to może zainteresuje też uczestników Sejmiku. Co to są zbiory wypukłe? Jakie operacje można na nich przeprowadzać? Jak można je „zaokrąglać”? Które z twierdzeń klasycznej geometrii istotnie wymagają założeń wypukłości? Czy kule (a co to jest kula?) zawsze są wypukłe? Co to jest otoczka zbioru wypukłego? Czy każdy zbiór wypukły na płaszczyźnie jest sumą pewnej ilości trójkątów? A w przestrzeni? Interesuje nas wszystko, co Autorzy prac będą mieli do powiedzenia o wypukłości. Literatura:

- [1.] I. M. JAGŁOM, W. G. BOŁTIAŃSKI, *Figury wypukłe*, PWN Warszawa 1955.
- [2.] M. MOSZYŃSKA, *Geometria zbiorów wypukłych*, WNT Warszawa 2001.

6 Z cyrklem lub bez, a czasem bez linijki

W cytowanej niżej książce R. Couranta (kuzyna św. Edyty Stein) oraz H. Robbinsa, cały trzeci rozdział poświęcony jest konstrukcjom geometrycznym. Są tam przykłady tego co się da skonstruować przy pomocy cyrkla i linijki, tego, co się tak skonstruować nie da, ale również tego, co się da skonstruować przy użyciu tylko cyrkla, albo tylko linijki. Mamy też informacje na temat innych przyrządów używanych do konstrukcji, dzięki którym można na przykład podwoić sześciąt. Przy okazji poznajemy własności ważnego geometrycznego przekształcenia: inwersji (oprócz geometrii inwersja ma też zastosowanie w łapaniu lwów na pustyni). Ciekawe

będzie przedstawienie zastosowań inwersji. Jeśli ktoś zajrzy do rozdziału czwartego o geometrii rzutowej, to może będzie umiał rozwiązać zadania konstrukcyjne z paragrafu siódmego, w których dopuszczalne jest jedynie użycie linijki (przepraszam: liniału, jak piszą autorzy).
Literatura:

- [1.] R. COURANT, H. ROBBINS, *Co to jest matematyka*, PWN Warszawa 1962.

7 Węzły i ich proste niezmienniki

Węzeł to zanurzenie okręgu w przestrzeni trójwymiarowej. Dwa węzły są „takie same”, jeżeli można „bez rozrywania” przekształcić jeden w drugi. Okazuje się, że rozstrzygnięcie, czy dwa węzły są takie same jest zagadnieniem nietrywialnym nawet dla prostych węzłów. Rozwiązuje się je przypisując węzłowi niezmienniki algebraiczne, w taki sposób, by były one równe dla „takich samych” węzłów. W pracy można by podać przykłady takich niezmienników.

Literatura:

- [1.] JÓZEF PRZYTICKI , *Węzły* .
[2.] AKIO KAWAUCHI , *A Survey of Knot Theory* Birkhaeuser, 1990.
[3.] DALE ROLFSEN , *Knots and links* Publish or Perish Inc., 1985.
[4.] miesięcznik *Delta* nr1/85.

8 Dalekie cyfry

Jaka jest 1354-ta cyfra rozwinięcia dziesiętnego liczby π , albo $\sqrt{2}$? Oczywiście znajomość pewnych wzorów oraz nieskomplikowany program komputerowy pozwala na to pytanie odpowiedzieć w przeciągu kilku minut. Czy aby na pewno? Skąd wiadomo, że ten program jest poprawny? A co zrobić, jeśli nie ma komputera i trzeba użyć kartki papieru i długopisu do wyznaczenia interesującej cyfry? Albo jeżeli chodzi nie o 1354-ą, ale o, dajmy na to, 10274530122-ą cyfrę po przecinku i wyniki częściowe podejsca „standardowego” nie mieszczą się w dostępnej pamięci operacyjnej?

Z drugiej strony. Nie chciał(a)byś wiedzieć jak często występuje np. cyfra 7 w rozwinięciu dziesiętnym liczby np. $\ln 2$? Niekoniecznie dokładnie – można przecież użyć statystycznych metod do oszacowania pewnych parametrów.

W pracy można by spróbować odpowiedzieć na wyżej wymienione pytania, a także na wiele innych.

Literatura:

- [1.] G. M. FICHTENHOLZ , *Rachunek różniczkowy i całkowy* tom I.
[2.] Z. FORTUNA, B. MACUGOW, J. WĄSOWSKI , *Metody numeryczne* WNT 1993.
[3.] F. LEJA , *Rachunek różniczkowy* .