

1 Równania rekurencyjne

Co to są równania rekurencyjne i teorię tych równań możemy poznać z książki [2]. Rozwiązaniem równania rekurencyjnego jest ciąg. Najprostszymi równaniami rekurencyjnymi są równania określające ciąg arytmetyczny $a_{n+1} = a_n + r$, gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego oraz określające ciąg geometryczny $a_{n+1} = q \cdot a_n$, gdzie $q \neq 0$ jest ilorazem ciągu geometrycznego. Nie o takie jednak ciągi chodzi w pracy.

W czeskich i słowackich olimpiadach matematycznych wystąpiły bardziej złożone ciągi rekurencyjne, np. w zadaniach 641, 657, 817, 874 i 902 ze zbioru zadań [1]. Zadania te można rozwiązać bez znajomości teorii równań rekurencyjnych. Może znasz inne zadania o ciągach rekurencyjnych, które też można rozwiązać bez znajomości tej teorii (np. z innych olimpiad matematycznych, z czasopisma *Matematyka*)? Może umiesz do tych rozwiązań dorobić swoją teorię i podać zadania, które można podobnie rozwiązać?

[1] J. Kalinowski, *Zbiór zadań z czeskich i słowackich olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawnicza - Poligraficzna "Adam", Warszawa 2002.

[2] I. Koźniewska, *Równania rekurencyjne*, PWN Warszawa 1972.

2 Ciekawe czworościany

Czworościany w których iloczyn długości par przeciwległych krawędzi mają ciekawe własności. Prawdziwe są następujące:

Twierdzenie 1. W czworoscianie iloczyn długości par przeciwległych boków są równe wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki łączące wierzchołki czworoscianu ze środkami kół wpisanych w przeciwległe ściany przecinają się w jednym punkcie.

Twierdzenie 2. Dla dowolnego czworoscianu iloczyn długości par przeciwległych krawędzi są długościami boków pewnego trójkąta.

Ciekawe własności mają też czworościany w których sumy długości par przeciwległych krawędzi są równe, w których sumy kwadratów długości par przeciwległych krawędzi są równe, w których proste skośne zawarte w przeciwległych krawędziach są prostopadłe itp. Może jeszcze inne rodzaje czworoscianów mają ciekawe własności?

Nie chodzi o to, by napisać prawie wszystko o czworoscianach. Należy wybrać pewien rodzaj czworoscianów i udowodnić jak najwięcej własności takich czworoscianów. Takie własności występują w formie zadań do udowodnienia w zbiorach z trudnymi zadaniami z geometrii przestrzennej.

3 Średnie w matematyce

W życiu codziennym najczęściej posługujemy się średnią arytmetyczną. Jednak tak naprawdę mamy dużo większy wybór. Istnieje wiele innych średnich posiadających swoje nazwy: średnia geometryczna, harmoniczna, potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna i inne. Między tymi średnimi można znaleźć dużo ciekawych związków.

Matematyka ma narzędzia do budowania nowych średnich. Jednym z nich jest tzw. twierdzenie Lagrange’a o wartości średniej. Pozwala ono z odpowiednich funkcji na prostej budować różne średnie. Istotny jest też problem odwrotny: z ilu różnych funkcji (i z jakich) daje się zbudować zadaną średnią?

Większość znanych średnich to tzw. średnie quasi-arytmetyczne czyli takie, które dają się przedstawić w postaci:

$$F^{-1} \left(\frac{F(x) + F(y)}{2} \right)$$

dla pewnej funkcji silnie rosnącej F .

Przy użyciu twierdzenia Lagrange’a lub średnich quasi-arytmetycznych można łatwo rozwiązać wiele trudnych zadań. Praca z tego tematu mogłaby zawierać odpowiednie przykłady ilustrujące przydatność średnich.

Literatura:

- [1.] F. LEJA, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, BM t.2 lub dowolna inna książka z podstaw analizy matematycznej.
- [2.] J. ACZÉL, J. DHOMBRES, *Functional equations in several variables*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol.31 (1989).
- [3.] P. K. SAHOO, T. RIEDEL, *Mean value theorems and functional equations*, World Scientific Publishing Company (1998).

4 Rozwiązania klasycznych równań funkcyjnych oraz ich zastosowania

Najbardziej znane równanie funkcyjne - równanie Cauchy’ego ma szereg prostych zastosowań w wielu dziedzinach wiedzy, np. w ekonomii. Przydatne są również różne modyfikacje i uogólnienia tego równania. Poza tym istnieje

wiele równań funkcyjnych dających się rozwiązać elementarnie lub poprzez sprowadzenie do równania Cauchy'ego. Praca z tego tematu mogłaby zawierać min.:

- rozwiązanie klasycznego równania Cauchy'ego dla funkcji ciągłych,
- własności pod którymi rozwiązanie równania Cauchy'ego jest ciągłe (np. monotoniczność),
- omówienie trzech pozostałych równań Cauchy'ego i równań Pexidera,
- inne równania funkcyjne dające się rozwiązać z wykorzystaniem rozwiązania równań Cauchy'ego,
- zastosowania wspomnianych równań.

Literatura:

- [1.] G. M. FICHTENHOLZ, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1*, PWN 1962.
- [2.] ROMAN GER, *O pewnych równaniach funkcyjnych z obciążoną dziedziną*, Prace naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach nr. 132 (1976).
- [3.] J. ACZÉL, J. DHOMBRES, *Functional equation in several variables*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol.31 (1989).
- [4.] W. EICHHORN, *Functional Equations in Economics*, Addison – Wesley Publishing Company, 1978.

5 Tablice trwania życia

Jedną z modnych ostatnio dziedzin matematyki jest matematyka ubezpieczeniowa. Jej zastosowania wymagają konstruowania tzw. tablic trwania życia. Dane, które się w tych tablicach znajdują umożliwiają aktuariuszom wyliczanie składki ubezpieczenia na życie. Jak się te tablice konstruuje? Jakie są matematyczne podstawy praktycznych zastosowań? Jakie są modele trwania życia stosowane przez ubezpieczycieli? Dlaczego kobiety zazwyczaj mają niższą emeryturę od mężczyzn? Te i inne zagadnienia, uzupełnione w miarę możliwości przykładami obliczeń składek ubezpieczenia na życie bądź emerytalnych dostarczą inspiracji ewentualnym autorom prac na ten temat.

Literatura:

- [1.] M. SKAŁBA, *Matematyka w ubezpieczeniach*, WNT 1999.
- [2.] M. MATŁOKA, *Matematyka w ubezpieczeniach na życie*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1997.

6 Arytmetyka finansowa

Coraz częściej mamy do czynienia z bankami: powierzamy im nasze oszczędności, zaciągamy kredyty. Oznaczmy przez $A(K, t)$ przyszłą wartość naszego kapitału K po czasie t . Chcielibyśmy, żeby $A(K, t) \geq K$, naturalne też jest oczekiwanie, że przyszła wartość sumy $K_1 + K_2$ po czasie t będzie sumą przyszłych wartości kapitałów K_1 i K_2 po tym samym czasie. Za to bank chciałby pewnie uniknąć „oscylatora” i dlatego przyszła wartość kapitału K złożonego najpierw na okres t , a potem na okres s (czyli $A(A(K, t), s)$) była taka sama, jak wartość tego samego kapitału, złożonego od razu na okres $t + s$ (czyli $A(K, t + s)$). Czy potrafisz pokazać, że te warunki charakteryzują już stosowanie przez bank oprocentowania złożonego? A może potrafisz podać warunki określające jednoznacznie oprocentowanie proste? Jak scharakteryzować stosowane w praktyce oprocentowanie „mieszane”: proste w odniesieniu do kwot wpłacanych w ciągu roku i złożone w odniesieniu do kwot pozostających na koncie w wypadającej raz na rok (miesiąc, kwartał) chwili dopisywania odsetek?

Jakie są możliwe formy spłacania kredytu? Dlaczego reklamowane czasem kredyty o „zerowej stopie procentowej” są w istocie droższe od tych „oprocentowanych”? Może uda ci się przeanalizować plany spłaty kredytów stosowane przez banki w Twojej miejscowości? Wykresy i tabele mile widziane.

Literatura:

- [1.] E. SMAGA, *Arytmetyka finansowa*, WN PWN Warszawa-Kraków 2000.

7 Zbiory wypukłe

„Interesuje mnie wszystko, co jest wypukłe” - miał powiedzieć wybitny matematyk Herman Minkowski po odkryciu głębokich związków dla zbiorów wypukłych (cytat za książką K. Maurina „Analiza. Część I. Elementy”, PWN Warszawa 1977). Jeśli coś było interesujące dla Minkowskiego, to może za interesuje też uczestników Sejmiku. Co to są zbiory wypukłe? Jakie operacje

można na nich przeprowadzać? Jak można je „zaokrąglać”? Które z twierdzeń klasycznej geometrii istotnie wymagają założeń wypukłości? Czy kule (a co to jest kula?) zawsze są wypukłe? Co to jest otoczka zbioru wypukłego? Czy każdy zbiór wypukły na płaszczyźnie jest sumą pewnej ilości trójkątów? A w przestrzeni? Interesuje nas wszystko, co Autorzy prac będą mieli do powiedzenia o wypukłości. Literatura:

- [1.] I. M. JAGŁOM, W. G. BOŁTIAŃSKI, *Figury wypukłe*, PWN Warszawa 1955.
- [2.] M. MOSZYŃSKA, *Geometria zbiorów wypukłych*, WNT Warszawa 2001.

8 Z cyrklem lub bez, a czasem bez linijki

W cytowanej niżej książce R. Couranta (kuzyna św. Edyty Stein) oraz H. Robbinsa, cały trzeci rozdział poświęcony jest konstrukcjom geometrycznym. Są tam przykłady tego co się da skonstruować przy pomocy cyrkla i linijki, tego, co się tak skonstruować nie da, ale również tego, co się da skonstruować przy użyciu tylko cyrkla, albo tylko linijki. Mamy też informacje na temat innych przyrządów używanych do konstrukcji, dzięki którym można na przykład podwoić sześciąt. Przy okazji poznajemy własności ważnego geometrycznego przekształcenia: inwersji (oprócz geometrii inwersja ma też zastosowanie w łapaniu lwów na pustyni). Ciekawe będzie przedstawienie zastosowań inwersji. Jeśli ktoś zajrzy do rozdziału czwartego o geometrii rzutowej, to może będzie umiał rozwiązać zadania konstrukcyjne z paragrafu siódmego, w których dopuszczalne jest jedynie użycie linijki (przepraszam: liniału, jak piszą autorzy). Literatura:

- [1.] R. COURANT, H. ROBBINS, *Co to jest matematyka*, PWN Warszawa 1962.