# PROPOZYCJE ZAGADNIEŃ NA XX OGÓLNOPOLSKI SEJMIK MATEMATYKÓW

## I. Podpisy cyfrowe

W roku 2002 Sejm przyjął ustawę o zasadach stosowania podpisów elektronicznych. Znajomość mechanizmu działania systemu podpisów cyfrowych zwiększa bezpieczeństwo takich podpisów. Praca powinna zawierać opis algorytmów stosowanych w podpisach cyfrowych i matematyczną analizę bezpieczeństwa takich algorytmów. Cennym uzupełnieniem może być prosty program ilustrujący np. wykonywanie operacji bankowych lub zakupów internetowych z zastosowaniem podpisu cyfrowego.

**Literatura**

1. N. Koblitz, *Wykłady z teorii liczb i kryptografii*, WNT, Warszawa 1994.
2. N. Koblitz, *Algebraiczne aspekty kryptografii*, WNT, Warszawa 2000.
3. M. Kutyłowski, W-B. Strothmann, *Kryptografia. Teoria i praktyka zabezpieczania systemów komputerowych*, Wyd. LUPUS 1998.
4. B. Schneier, *Kryptografia dla praktyków*, WNT, Warszawa 1995.
5. W. Stalings, *Ochrona danych w sieci i intersieci*, WNT, Warszawa 1997.
6. Internet.

## II. Rozwiązywanie równań wielomianowych

Poszukiwania metod rozwiązywania równań wielomianowych były początkiem wielu gałęzi współczesnej matematyki. Praca może zawierać wyprowadzenia wzorów wyrażających pierwiastki równań stopnia 3 i 4 oraz analizę własności tych pierwiastków. Można zająć się metodami wyznaczania pierwiastków pewnych wielomianów wyższego stopnia (np. wielomianów symetrycznych). W praktycznych zastosowaniach ważne są również metody przybliżone (np. metoda siecznych lub metoda stycznych).

**Literatura**

1. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyzszej*, PWN, Warszawa 1975.
2. J. Browkin, *Teoria ciał*, PWN, Warszawa 1977.
3. G. M. Fichtenholtz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, t. 1*, PWN, Warszawa 1992.

## III. Twierdzenie Ptolomeusza i jego zastosowanie

Twierdzenie Ptolomeusza mówi, że jeżeli czworokąt jest wpisany w okrąg, to iloczyn długości jego przekątnych jest równy sumie iloczynów długości boków przeciwległych.
Twierdzenie Ptolomeusza albo wcale albo bardzo rzadko jest wykorzystywane na lekcjach matematyki w szkole średniej. Zastosowanie tego twierdzenia może czasem uprościć albo skrócić rozwiązanie zadania. Dlatego interesujące są takie przykłady. Nie chodzi jednak o zadania bardzo proste, typu: mając danych pięć elementów z sześciu (4 długości boków i 2 długości przekątnych) czworokąta wpisanego w okrąg, obliczyć szósty element. Należy znaleźć, w pracy umieścić i rozwiązać z zastosowaniem twierdzenia Ptolomeusza możliwie jak największą ilość istotnie różnych zadań. Nie ma jednak sensu umieszczanie rozwiązań

zadań analogicznych do wcześniejszych rozwiązań. Takich zadań w których można zastosować twierdzenie Ptolomeusza należy szukać wśród problemów z konkursów i olimpiad matematycznych. Pomocną może okazać się też książka: J. Kalinowski, *Zbiór zadań z czeskich i słowackich olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawniczo - Poligraficzna "Adam", Warszawa 2002.

### IV. Fraktale

- Co to są fraktale? Przykłady fraktali, skonstruowanie własnego fraktala (program komputerowy).
- Układy iterowanych odwzorowań, skonstruowanie własnych fraktali będących atraktorami układu IFS.
- Interpolacja fraktalna: mając dane $N$ punktów w $\mathbb{R}^2$ skonstruować układ IFS $w_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, którego atraktor jest wykresem funkcji ciągłej.
- Badanie wymiaru Hausdosffa dla skonstruowanego fraktala.

**Literatura**


1. J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa 1993.
2. M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press 1988.
3. G.A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag 1990.
4. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe,*Granice chaosu, Fraktale, tom I*, PWN, Warszawa 1995.
5. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu, Fraktale, tom II*, PWN, Warszawa 1996.


### V. Zliczanie obiektów kombinatorycznych

W wierzchołkach dwudziestościanu foremnego rozmieszczamy dwie kule czerwone,jedną kulę białą i jedną niebieską. Dwa rozmieszczenia uważać będziemy za równoważne, jeśli jedno z drugiego powstaje przez pewien obrót dwudziestościanu. Na ile istotnie różnych sposobów możemy to zrobić? Odpowiedź na to, jak i wiele innych pytań dotyczących teorii zliczania obiektów kombinatorycznych, daje lemat Cauchy'ego-Frobeniusa-Burnside'a i jego wniosek - twierdzenie Póly. Omów powyższe zagadnienia oraz w oparciu o nie przytocz własne problemy i samodzielne ich rozwiązania.

**Literatura**


1. M. Klin, R. Pöschel, K. Rosenbaum, *Algebra stosowana dla matematyków i informatyków*, WNT, Warszawa 1992.
2. W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.
3. W. Saczkov, *Kombinatoryjne metody diskretnoj matematiki*, Nauka, Moskwa 1977.


### VI. Symetria, harmonia, chaos

Każde z trzech użytych słów może być tematem oddzielnej pracy. I tak na przykład pisząc na temat symetriimożna się ograniczyć do jej znaczenia geometrycznego. Opis izometrii płaszczyzny, zastosowanie symetrii w rozwiązywaniu problemów jest inspirujące i ciekawe. Ale można mówić też o symetrii poza matematyką. Od symetrii już tylko krok do harmonii, której przykłady znajdziemy w architekturze, malarstwie, zdobnictwie, muzyce itp. A stąd bardzo blisko do chaosu. Możemy stawiać sobie pytania o długości linii brzegowej naszego wybrzeża, o fraktale. Wszystko to spotkamy szukając modelu matematycznego naszego świata, próbując opisać otaczającą nas rzeczywistość.

**Literatura**


1. J. Bronowski, *Potęga wyobraźni*, PIW, Warszawa 1988.
2. W.W. Sawyer, *W poszukiwaniu modelu matematycznego*, Seria "Omega", Wiedza Powszechna, Warszawa 1973.
3. W. Więsław, *Liczby i geometria*, WSiP, Warszawa 1996.
4. I. Stewart, *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa 1994.
5. M. Szurek, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa 1984.
6. W.W. Prasolov, *Zadaczi po planimetrii*, Nauka, Moskwa 1986.


## VII. Charakteryzacje trójkatów

Są pewne funkcje, przy pomocy których możemy określić czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny. Taką funkcją jest

$$U = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A,$$

gdzie $A, B, C$ są kątami wewnętrznymi trójkąta. Dla funkcji tej prawdziwe jest twierdzenie:

*Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby trójkąt o katach wewnętrznych $A, B, C$ był trójkątem ostrokątnym, prostokątnym, rozwartokątnym jest aby odpowiednio: $U > 0$, funkcja była nieokreślona, $U < 0$.*

Podobnie jest z inną funkcją określoną na elementach trójkąta:

$$V = a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2,$$

gdzie $a, b, c$ są długościami boków trójkąta, a $R$ jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Dla tej funkcji prawdziwe jest twierdzenie

*Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby trójkąt o bokach długości $a, b, c$ i długości $R$ promienia okręgu opisanego na nim, był trójkątem ostrokątnym, prostokątnym, rozwartokątnym jest aby była spełniona odpowiednio nierówność: $V > 0$, $V = 0$, $V < 0$.*

W pracy chodzi o sformułowanie i udowodnienie jak największej ilości twierdzeń o charakteryzacji trójkątów.

Kilka takich charakteryzacji trójkątów można znaleźć w zbiorze [1]. Może są w innych zbiorach zadań, czy w czasopismach matematycznych? Jeżeli nie umiecie więcej znaleźć takich charakteryzacji, to może uda Wam się sformułować i udowodnić swoje, nieznane jeszcze charakteryzacje?

**Literatura**


1. J. Kalinowski, *Zbiór zadań z czeskich i słowackich olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawniczo - Poligraficzna "Adam", Warszawa 2002