XXXVIII Regionalny Konkurs
Rozkosze łamania Głowy
klasy I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Liczba $2015^{2017} + 2 \cdot 2015^{2016} + 2015^{2015}$ jest podzielna przez:

A. 2017

B. 2016

C. 2015

2. Układ równań $\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x+y} = 7 \\ \frac{x^3-y^3}{x-y} = 19 \end{cases}$ ma w zbiorze liczb całkowitych:

A. co najwyżej sześć rozwiązań

B. co najmniej dwa rozwiązania

C. nie więcej niż trzy rozwiązania

3. Z punktu P leżącego na okręgu o środku S poprowadzono średnicę PQ i cięciwę PR. Kąt pomiędzy cięciwą i średnicą ma 30°. Styczna do okręgu w punkcie R przecina przedłużenie odcinka PQ w punkcie T. Wówczas:

A. miara $\sphericalangle PRT$ jest cztery razy większa od miaty $\sphericalangle RTS$

B. trójkąty $\triangle PSR$ i $\triangle RQT$ są podobne

C. $\triangle QRS$ jest równoramienny

4. W trójkącie ABC z wierzchołka A poprowadzono środkową, której długość jest dwa razy mniejsza od długości jednego z boków tego trójkąta. Zatem trójkąt ABC:

A. mógł być równoramienny

B. mógł być prostokątny

C. mógł być ostrokątny

5. Równoległobok o bokach a i b podzielono prostymi równoległymi do boków na n przystających rombów. Zatem:

A. wyjściowy równoległobok musiał być rombem

B. dla pewnych wartości a, b liczba n może być równa 17

C. jeśli $n = 12$, to na otrzymanym rysunku może być widocznych 60 równoległoboków

6. Niech $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f(x) = x^2 + ax + b$. Wiadomo, że $f(a) = 2015b$. Zatem:

A. istnieje dokładnie jedna taka funkcja

B. nie istnieje taka funkcja

C. najmniejsza wartość współczynnika a to 1007

7. Na każdym z 64 pól szachownicy napisano jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Suma wszystkich napisanych liczb wynosi 13. W jednym ruchu można zamiast dowolnych dwóch liczb napisać na jednym z pól ich sumę lub różnicę, a na drugim zero. Po pewnej liczbie ruchów na szachownicy zostały same zera i liczba k. Liczbą k może być:

A. -1

B. 0

C. 1

8. Obwód trójkąta, którego współrzędne wszystkich wierzchołków są liczbami całkowitymi jest liczbą całkowitą. Zatem spośród trzech boków trójkąta:

A. dokładnie jeden może być równoległy do jednej z osi układu współrzędnych

B. dokładnie dwa mogą być równoległe do osi układu współrzędnych

C. żaden może nie być równoległy do żadnej z osi układu współrzędnych

9. Jeśli liczba $5k + 1$ jest podzielna przez liczbę $k - 1$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą, to:

A. za k można wstawić więcej niż 6 wartości

B. suma wszystkich możliwych wartości k jest podzielna przez 5

C. suma wszystkich możliwych wartości k jest parzysta

10. Zbiór A ma k elementów, gdzie $k \geqslant 3$. Zbiór B jest 3–elementowym podzbiorem zbioru A. Niech n oznacza liczbę funkcji różnowartościowych odwzorowujących zbiór B w zbiór A. Wtedy:

A. n może być liczbą nieparzystą

B. jeśli $k \geq 5$, to n jest podzielne przez 10

C. jeśli $k > 10$, to $n \geqslant 1700$

11. Punktem stałym funkcji f nazywamy taki argument x_0 należący do dziedziny funkcji, dla którego $f(x_0) = x_0$. Zatem:

A. funkcja dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma tyle samo punktów stałych co funkcja $g(x) = (f(x))$

B. funkcja $h(x) = (f(x))^2$, gdzie $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ma tyle samo punktów stałych co funkcja f

C. jeśli $f(x) = \frac{a}{x^2}$, to dla pewnej wartości $a \neq 0$ funkcja $g(x) = f\big(f(x)\big)$ nie ma punktów stałych

12. W pewnym trapezie równoramiennym przekątna trapezu jest prostopadła do ramienia i zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu. Wówczas:

A. obwód trapezu jest równy pięciu długościom ramienia

B. trapez ten można podzielić na trapezy podobne do wyjściowego

C. trapez ten można podzielić na sześć trójkątów równobocznych

13. Niech $\overline{0,abc}$ oznacza liczbę, w której a oznacza cyfrę części dziesiętnych, b – cyfrę części setnych, c – części tysięcznych.
Równanie $\overline{0,xyz} + \overline{0,zxy} = 1$ ma:

A. co najmniej jedno rozwiązanie

B. co najwyżej dwa rozwiązania

C. nie ma rozwiązań

14. Wiadomo, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |x + a| - |x + b|$ jest nieparzysta (tzn. $f(-x) = -f(x)$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$).
Liczby a i b mogą być:

A. równe

B. przeciwne

C. odwrotne

15. Dany jest ciąg liczb $14, 15, 16, \ldots 2016$.
Z tego ciągu można wybrać dokładnie:

A. 1001 liczb tak, aby suma każdych dwóch wybranych liczb była podzielna przez przez 2

B. 668 liczb tak, aby suma każdych trzech wybranych liczb była podzielna przez przez 3

C. 1002 liczby tak, aby suma każdych dwóch wybranych liczb była podzielna przez przez 2

16. Równanie $x^2 + mx + 2 = 0$, gdzie $m > 0$ ma dwa różne pierwiaski x_1 i x_2. Zatem:

A. $(x_1 - x_2)^2 \leqslant (x_1 + x_2)^2$

B. $x_1 + x_2 \leqslant x_1 - x_2$

C. $m > 2$

17. Niech $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, o ile n jest liczbą naturalną dodatnią oraz $0! = 1$. Jeśli k, n, m są takimi liczbami naturalnymi dodatnimi, że $k = m \cdot n$, to:

A. $m!$ jest dzielnikiem liczby $k!$

B. $\frac{k!}{m!} > n!$

C. $k!$ jest podzielne przez $m! \cdot n!$

18. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Zatem

A. $\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots\left(f\left(33\right)\right)\ldots\right)\right)\right)}_{33} = 33$

B. $\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots\left(f\left(5555\right)\right)\ldots\right)\right)\right)}_{5555} = 5555$

C. $\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots\left(f\left(321\right)\right)\ldots\right)\right)\right)}_{123} = 123$

19. Pierwiastami równania $x^2 + px + q = 0$ są liczby x_1, x_2, zaś pierwiastkami równania $x^2 - px + q = 0$ są liczby x_1, x_3. Zatem:

A. $p = 1$ lub $q = 1$

B. $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

C. $2p + q = x_3 - x_1$

20. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą niewiększą od x. Wtedy:

A. istnieje taka niecałkowita liczba a, że $[2a] > 2[a]$

B. jeśli a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez liczbę całkowitą k, to $k \cdot \left[\frac{a}{k}\right] = [a]$

C. jeśli a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez liczbę całkowitą k, to $k \cdot [a] \leqslant [ka]$

ODPOWIEDZI

1 BC

2 AB

3 ABC

4 AB

5 BC

6 C

7 AC

8 AB

9 ABC

10 BC

11 AB

12 ABC

13 AB

14 ABC

15 BC

16 ABC

17 AC

18 A

19 BC

20 AC