XXXV Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ połączono ze środkami K i L boków BC i CD. Wówczas
   a) przekątna BD została podzielona na trzy odcinki równej długości,
   b) pole czworokata $KCLA$ jest równe połowie pola równoległoboku,
   c) trójkaty KDA i LBA są podobne.

2. Niech p i q będą kolejnymi liczbami pierwszymi większymi niż 2. Wówczas liczba $p+q$ jest iloczynem
   a) co najmniej dwóch (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1,
   b) co najmniej czterech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1,
   c) co najwyżej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

3. W trójkąt równoramienny wpisano kwadrat w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie tego trójkąta, a pozostałe dwa na jego bokach. Środki ciężkości kwadratu i trójkąta pokrywają się. Zatem
   a) stosunek długości podstawy trójkąta do długości boku kwadratu jest dwukrotnie większy od stosunku pola tego trójkąta do pola kwadratu,
   b) stosunek wysokości trójkąta opuszczonej na podstawę do boku kwadratu jest równy stosunkowi pola tego trójkąta do pola kwadratu,
   c) pole trójkąta jest co najmniej dwukrotnie większe od pola kwadratu.

4. Rozważmy zbiór $A = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \max(x,y) \geqslant 1\}$, gdzie $\max(x,y)$ oznacza nie mniejszą z liczb x, y. Wówczas:
   a) pewien punkt z III ćwiartki układu współrzędnych należy do zbioru A,
   b) w zbiorze A znajdziemy punkty, których współrzędne spełniają nierówność $3x+y-5 \leqslant 0$,
   c) wszystkie punkty, których współrzędne spełniają nierówność
   $$|x+3| \leqslant 1$$
   należą do zbioru A.

5. W pewnym trapezie boki maja długości $a, a, a, 2a$, gdzie $a > 0$. Wówczas:
   a) przekątna trapezu zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego trapezu,
   b) pole trapezu wynosi $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$
   c) kąt rozwarty trapezu jest o 60° stopni większy od kąta ostrego.

6. Dana jest k–cyfrowa liczba a o sumie cyfr 11, gdzie $k \geqslant 3$. Wtedy
   a) liczba a może być podzielna przez 4,
   b) liczba a może być podzielna przez 11,
   c) jeśli $k = 3$, to wszystkich różnych liczb a podzielnych przez 5 jest dokładnie 14.
7. Równoległobok podzielono przekątnymi na trójkąty. Wśród wszystkich trójkątów jakie można zobaczyć na rysunku
   a) są co najmniej cztery pary trójkątów przystajacych,
   b) jest dokładnie sześć par trójkatów podobnych,
   c) jest więcej niż sześć par trójkatów podobnych.
8. Środkowa AA' trójkąta ABC jest dwukrotnie krótsza od boku BC. Trójkąt ABC
   a) może być trójkatem równoramiennym,
   b) może być trójkatem prostokątnym,
   c) może być trójkątem rozwartokątnym.
9. Liczba $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2012}$ jest
   a) podzielna przez 2 i 3,
   b) podzielna przez 4 i 3,
   c) podzielna przez 2, ale niepodziena przez 4.
10. Funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami nieparzystymi (tzn. $f(-x) = -f(x)$).
    Rozważmy cztery funkcje:
    $h(x) = f(x) + g(x), \quad k(x) = f(x) - g(x), \quad r(x) = f(x) \cdot g(x), \quad p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
    a) Wśród rozważanych funkcji przynajmniej dwie są funkcjami nieparzystymi.
    b) Można podać przykład takich funkcji f i g, że wszystkie cztery rozważane funkcje będą funkcjami parzystymi (tzn. $f(-x) = f(x)$).
    c) Funkcja $w(x) = k(x) \cdot p(x)$ może być funkcją parzystą.

11. Układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$$

a) ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych,

b) ma rozwiązanie w zbiorze liczb wymiernych,

c) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

12. Dany jest kwadrat o boku $6a$. Rozważamy prostokąty zawarte w tym kwadracie o bokach równoległych do przekatnych kwadratu. Pole takiego prostokata jest zawsze mniejsze niż

a) $16a^2$,

b) $18a^2$,

c) $20a^2$.

13. Dla liczby naturalnej $n > 0$ obliczamy średnią geometryczną G_n wszystkich jej dzielników naturalnych. Wówczas

a) dla $n = 4k+1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, G_n jest liczbą niewymierną,

b) wśród wartości G_n obliczonych dla liczb $n < 100$ jest dokładnie 10 liczb całkowitych,

c) jeśli $n = k^4$, to G_n jest liczba wymierną.

14. Wśród wszystkich liczb postaci $3n+2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest:

a) nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 2,

b) nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 5,

c) nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 6.

15. W finałowym spotkaniu grało sześciu graczy, każdy z każdym. Było dokładnie 5 remisów i po podliczeniu uzyskanych punktów wyłoniono jednego zwycięzcę. Za każdą wygraną partię zawodnik otrzymywał 5 punktów, za remis 3 punkty, zaś za przegraną 0 punktów. Zatem:

a) każdy z graczy musiał uzyskać inny wynik punktowy,

b) każdy z graczy przegrał przynajmniej jedną partię,

c) zwycięzca musiał wygrać przynajmniej dwie partię.

16. Punktem stałym funkcji f nazywamy taki argument x_0 należący do dziedziny funkcji, dla którego $f(x_0) = x_0$. Zatem:

   a) funkcja dana wzorem $f(x) = -\frac{1}{x}$ nie ma punktów stałych,

   b) funkcja $g(x) = f\Big(f(x)\Big)$ dla $f(x) = -\frac{1}{x}$ nie ma punktów stałych,

   c) dla pewnej wartości $a \neq 0$ funkcja $g(x) = f\Big(f(x)\Big)$ dla $f(x) = \frac{a}{x}$ nie ma punktów stałych.

17. Niech $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, o ile n jest liczbą naturalną dodatnią oraz $0! = 1$. Jeśli k, n, m są takimi liczbami naturalnymi dodatnimi, że $k = m + n$, to

   a) $m!$ jest dzielnikiem liczby $k!$,

   b) $\frac{k!}{m!} > n!$,

   c) $k!$ jest podzielne przez $m! \cdot n!$.

18. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa ma długość ramion, a dłuższa długość przekątnej. Wówczas:

   a) przekątne tego trapezu muszą przecinać się pod kątem prostym,

   b) w trapez ten można wpisać okrąg,

   c) jeden z kątów wewnętrznych tego trapezu ma miarę większą niż $110°$.

19. Niech $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Wtedy:

   a) istnieje taka niecałkowita liczba a, że $[a] = 2[a]$,

   b) jeśli a jest liczbą całkowitą nieparzystą, to $2[\frac{a}{2}] = [a]$

   c) $[x] = [x-1] + 1$.

20. Funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją okresową o okresie $t > 0$ wtedy, gdy dla dowolnego $x \in D$ spełnione są warunki:

$$x - t \in D \quad \text{oraz} \quad x + t \in D$$
$$f(x-t) = f(x) = f(x+t)$$

   Pewna funkcja f jest funkcja okresowa o okresie t. Wówczas

   a) każda całkowita wielokrotność liczby t jest okresem funkcji f,

   b) jeśli t jest również okresem funkcji g danej wzorem $g(x) = 2^n \cdot f(x)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $n > 6$, to okresem funkcji f jest każda z liczb $\frac{t}{2^k}$, dla $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

   c) wśród wszystkich liczb t będących okresem funkcji f zawsze można wskazać liczbę najmniejszą.