XXXIV Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Dane są trzy trójkąty prostokątne. Boki pierwszego z nich są równe a, b, c, gdzie $a < b < c$, boki drugiego – c, d, e, gdzie $c < d < e$, a boki trzeciego – e, f, g, gdzie $e < f < g$. Trójkąty te połączono równymi bokami (tak, że kolejny trójkąt nie nakłada się na poprzedni) tworząc nowy wielokąt. Przy odpowiednio dobranych długościach boków trójkątów:

   a) otrzymany wielokąt może być czworokątem,

   b) jeden z kątów otrzymanego wielokąta moze być wklęsły,

   c) otrzymany wielokąt zawsze ma dokładnie jeden kąt ostry.

2. Wśród trzech liczb $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $b = \sqrt{2}+1$, $c = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2}$

   a) co najmniej dwie są równe,

   b) wszystkie są różne,

   c) co najwyżej dwie są równe.

3. Wśród liczb $5^n+1, 5^n+2, 5^n+3$, gdzie n jest liczbą całkowitą nieujemną:

   a) dla pewnego n wszystkie trzy liczby mogą być liczbami pierwszymi,

   b) dla każdego n jest co najmniej jedna liczba pierwsza,

   c) dla pewnego n mogą być dokładnie dwie liczby pierwsze.

4. Wiadomo, że $x + \frac{1}{x} = 6$, gdzie $x > 0$. Wówczas:

   a) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 36$,

   b) $x - \frac{1}{x} = 4\sqrt{2}$,

   c) $\frac{1}{x} = 3 - 2\sqrt{2}$

5. Spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 20$ wybieramy dowolne pięć kolejnych liczb. Można tak wybrać pięć kolejnych liczb, by ich suma była:

   a) kwadratem liczby parzystej,

   b) podzielna przez 19,

   c) podzielna przez 17.

6. Jeśli $a, b > 0$ to:

   a) $2a^2 + 3b^2 \leqslant 2\sqrt{6}ab$,

   b) $2a^2 + 3b^2 \leqslant (a+b)^2$,

   c) $2a^2 + 3b^2 \leqslant 5ab$.

7. Trójkąt T_1 ma boki 6, 6, 5, trójkąt T_2 ma boki 5, 5, 7, zaś trójkąt T_3 ma boki 4, 6, 7.

   a) Największe pole ma trójką T_1.

   b) Pola i obwody tych trójkątów są równe.

   c) Najmniejsze pole ma trójkąt T_3.

8. W tablicę $n \times n$ wspiano w każde z pól 1 lub -1. Następnie policzono sumy liczb w każdym z wierszy i sumy liczb w każdej z kolumn, a następnie obliczono sumę S wszystkich sum otrzymanych z wierszy i kolumn.

   Dla pewnej liczby n suma S może być równa:

   a) 2011,

   b) 2012,

   c) 0.

9. Rozważmy tę samą tablicę $n \times n$ wypełnioną liczbami 1 lub -1 jak w poprzednim zadaniu.

   a) Jeśli dla $n > 2$ dokładnie w pięciu polach zamienimy liczby 1 na liczby -1, to suma S zmaleje o 5.

   b) Dla dowolnej liczby n można tak wspisać w tablicę liczby 1 i -1, by suma S była równa 1.

   c) Dla dowolnej liczby $n > 2$ można tak wspisać w tablicę liczby 1 i -1, by każda z sum jakie otrzymaliśmy z poszczególnych wierszy i kolumn była inna.

10. Liczba $3^{2012} - 2^{2012}$ jest liczbą:

    a) złożoną,

    b) podzielną przez 3,

    c) podzielną przez 5.

11. Boki trójkąta mogą mieć długości:

    a) 2^{2011}, 2^{2012}, 2^{2013},

    b) $2^{2012}+3^{2011}$, $2^{2012}+3^{2012}$, $2^{2012}+3^{2013}$,

    c) $2^{2012}-2$, 2^{2012}, $2^{2012}+2$.

12. Suma dwudziestu sześciu kolejnych liczb parzystych:

    a) zawsze jest podzielna przez 26,

    b) może być kwadratem liczby naturalnej,

    c) może mieć dokładnie osiem różnych dzielników.

13. Wiadomo, że liczby $5a$ oraz $7a$ są liczbami wymiernymi. Zatem wymierną jest również liczba:

    a) a,

    b) $3a$,

    c) $\frac{2}{3}a$.

14. Niech a, b, c oznaczają boki trójkąta prostokątnego, gdzie $a \leqslant b \leqslant c$, zaś r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wtedy dla dowolnych takich liczb a, b, c:

    a) $2\pi r > a + b$,

    b) $\pi r^2 < \frac{1}{4}ab$,

    c) $\frac{a+b+c}{2} \leqslant \frac{ab}{2r}$.

15. Niech a i b będą liczbami naturalnymi, gdzie $a \leqslant b < 100$. Wiadomo, że największy wspólny dzielnik liczb a i b wynosi 3, a ich najmiejsza wspólna wielokrotność to 63. Wówczas:

    a) liczby a i b moga być równe,

    b) liczba b zawsze jest wielokrotnością liczby a,

    c) liczba a może nie być dzielnikiem liczby b.

16. Miary kątów pewnego trójkąta tworzą ciąg geometryczny. Jeden z kątów tego trójkąta może mieć miarę:

    a) 60°,
    b) $\frac{\pi(3+\sqrt{5})}{2}$,
    c) $\frac{\pi(3-\sqrt{5})}{2}$.

17. Ciąg (a_n) określony jest następująco:
    $a_1 = 2$, zaś $a_{n+1} = a_1 + na_n$ dla $n \geqslant 2$.
    Zatem:

    a) jednym z wyrazów tego ciągu jest liczba 1024,
    b) wszystkie wyrazy tego ciągu są parzyste,
    c) wśród wyrazów tego ciągu są dokładnie trzy liczby czterocyfrowe.

18. Niech a i b będą liczbami naturalnymi dodatnimi. Wiadomo, że liczba $5a + 23b$ jest podzielna przez 17. Wówczas podzielna przez 17 jest również liczba:

    a) $a + 8b$,
    b) $5a + 6b$,
    c) $10a + 45b$.

19. Dany jest wielomian $W(x) = (1-x)^{2012}(1+x)^{2012} + 2012$. Zatem:

    a) wielomian W nie ma miejsc zerowych,
    b) zbiorem wartości wielomianu W jest przedział $< 2012, +\infty)$,
    c) suma wszystkich współczynników tego wielomianu wynosi 2012.

20. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Prawdą jest, że:

    a) w zbiorze wartości funkcji jest liczba najmniejsza,
    b) funkcja f przyjmuje wszystkie wartości dodatnie,
    c) wykres funkcji f ma oś symetrii.