XXXI Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Istnieje liczba rzeczywista x, dla której istnieją jednocześnie wartości rzeczywiste pierwiastków:

   a) $\sqrt{x}$ i $\sqrt{-x}$,

   b) $\sqrt{x-2}$ i $\sqrt{1-x}$,

   c) $\sqrt{\sqrt{3}x+1}$ i $\sqrt{\sqrt{2}-x}$.

2. Na danym okręgu odmierzamy kolejno łuki AB, BC i CD odpowiadające kątom środkowym 40°, 80° i 100°. Wówczas:

   a) czworokąt $ABCD$ ma dwa kąty rozwarte,

   b) najmniejszy kąt w czworokącie $ABCD$ ma miarę 60°,

   c) dokładnie jeden kąt czworokąta $ABCD$ jest prosty.

3. Przekrój sześcianu płaszczyzną może być:

   a) trapezem równoramiennym,

   b) trapezem o ramionach różnej długości,

   c) trójkątem równobocznym.

4. Zbiór wartości funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ składa się z dwóch liczb c i d.
   Istnieją takie liczby a i b, że $a < b$ oraz:

   a) $f(x) = c$ dla wszystkich $x \in (a, b)$,

   b) $f(a) < f(b)$,

   c) $f(a) = d$ oraz $f(b) = c$.

5. Dany jest trójkąt różnoboczny (każdy bok jest innej długości). Trójkąt ten można podzielić jedną linią prostą na:

   a) dwa trójkąty o równych polach,

   b) dwa trójkąty podobne,

   c) dwa trójkąty przystające.

6. Proste AC i BC są styczne do okręgu o środku O w punktach A i B. Kąt $\angle ABC$ ma miarę $65°$. Wówczas:
   a) $|\angle AOB| \leqslant 130°$,
   b) $|\angle AOB| \geqslant\leqslant 130°$,
   c) $|\angle AOB|$ zależy od odległości punktu C od środka okręgu.

7. Wiadomo, że liczba $2n^3 + n$ jest podzielna przez 6. Zatem:
   a) n jest podzielne przez 6,
   b) n jest podzielne przez 2
   c) jedynie liczby $n = 3k + 1$, gdzie k oznacza dowolną liczbę nieparzystą, spełniają podany warunek.

8. W kwadrat $ABCD$ o boku długości a wpisano okrąg. Cięciwa okręgu zawarta w prostej przechodzącej przez wierzchołek$A$ i środek boku CD ma długość:
   a) mniejszą niż $a\sqrt{3}$,
   b) większą niż $a\sqrt{2}$,
   c) mniejszą niż $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

9. Wiadomo, że liczba m jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wówczas sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych jest również:
   a) $2m$,
   b) $5m$,
   c) $13m$.

10. Zbiór A ma siedem elementów. Zbiór B jest k–elementowym podzbiorem zbioru A. Niech n oznacza liczbę funkcji różnowartościowych odwzorowujących zbiór B w zbiór A. Wtedy:
    a) n może być liczbą nieparzystą,
    b) jeśli $k \geqslant 2$, to n jest podzielne przez 10,
    c) jeśli $k = 3$, to $n \geqslant 210$.

11. Dany jest ciąg liczb   3, 4, 5, ... 165. Z tego ciągu można wybrać co najwyżej 81 liczb tak, aby:

   a) suma każdych dwóch wybranych liczb była podzielna przez przez 2,
   b) suma każdych trzech wybranych liczb była podzielna przez przez 2,
   c) suma każdych trzech wybranych liczb nie była podzielna przez przez 2.

12. Jeśli liczba $3k-1$ jest podzielna przez $k+1$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą, to:

   a) za k można wstawić więcej niż 4 wartości,
   b) za k można wstawić więcej niż 9 wartości,
   c) suma wszystkich możliwych wartości k wynosi -6.

13. W okrąg o promieniu r wpisano trójkąt równoboczny i trójkąt równoramienny (przy czym podstawa ma inną długość niż ramię) o jednym wspólnym wierzchołku i wspólnej osi symetrii. Pole tej części trójkąta równobocznego, którą zakrył trójkąt równoramienny wynosi $\frac{r^2\sqrt{3}}{3}$. Wówczas:

   a) trójkąt równoramienny może być trójkątem ostrokątnym,
   b) trójkąt równoramienny może być trójkątem prostokątnym,
   c) trójkąt równoramienny może być trójkątem rozwartokątnym.

14. Równanie $(xy-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$ ma w zbiorze liczb całkowitych:

   a) nieskończenie wiele rozwiązań (x, y), gdzie $x > 0$ i $y > 0$,
   b) nieskończenie wiele rozwiązań (x, y), gdzie $x > 0$ i $y < 0$,
   c) co najmniej trzy rozwiązania.

15. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z czterech różnych kolorów, przy czym każdy kolor został wykorzystany. Zatem:

   a) zawsze istnieje prosta, której punkty są co najmniej w trzech kolorach,
   b) może istnieć prosta złożona z punktów w jednym kolorze,
   c) może istnieć kierunek, w którym każda prosta jest co najwyżej w dwóch kolorach.

16. Dane są punkty $A = (\frac{3}{2}, 2)$, $B = (-3, 1)$ i $C = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ oraz wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$. Istnieje łamana nie przecinająca wykresu funkcji f i łącząca punkty:

   a) A i B,

   b) A i C,

   c) B i C.

17. Pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + c$ są liczby b i c. Zatem:

   a) b może być równe c,

   b) $c \leqslant b$,

   c) $b + c \leqslant 0$.

18. Wykres funkcji $f(x) = x^5 - x^4 - 2ax^3 + 2ax^2 + a^2x - a^2$:

   a) może mieć z osią OX dokładnie jeden punkt wspólny,

   b) zawsze ma z osią OX trzy punkty wspólne,

   c) może mieć z osią OX pięć różnych punktów wspólnych.

19. Ciąg dany wzorem $a_n = (n + A)^n$, gdzie $n \geqslant 1$, jest rosnący:

   a) dla $A = 2009$,

   b) dla każdej wartości A,

   c) dla $A \in (-\frac{3}{2}, +\infty)$.

20. Dany jest wielomian $W(x) = (3x^2 - x - 1)^{2009} \cdot (x^2\sqrt{2} - x - \sqrt{2})^{2009}$. Suma współczynników tego wielomianu:

   a) jest liczbą niewymierną,

   b) jest liczbą całkowitą,

   c) jest liczbą ujemną.