XXX Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. 7% z 20% wpływów z koncertu dzielone jest między trzy organizacje młodzieżowe w stosunku $2:4:1$.
   a) pierwsza organizacja otrzymuje 0,4% wszystkich wpływów z koncertu,
   b) jeśli wpływy z koncertu wyniosą 900 zł, to druga organizacja otrzyma ponad 100zł,
   c) jeśli wpływy z koncertu nie przekroczą 5000zł, to trzecia organizacja otrzyma poniżej 100zł.

2. Wiadomo, że $A \cap C \subset B$ oraz $B \cap C \subset A$. Na tej podstawie można wnioskować, że:
   a) $A \cap B = C$,
   b) $C \subset A \cap B$,
   c) $A \cap B \subset C$.

3. Nierównością prawdziwą jest:
   a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ dla dowolnych $a, b > 0$,
   b) $(a+b)^2 \geqslant a^2 + b^2$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$
   c) $(a+b)^2 < a^2+b^2$ dla nieskończenie wielu par liczb rzeczywistych (a, b).

4. Pięć różnych prostych może podzielić płaszczyznę na:
   a) 8 części,
   b) 15, części,
   c) 16 części.

5. Wypełniamy liczbami tablicę $n \times m$ (o n wierszach i m kolumnach) w ten sposób, by iloczyn liczb w każdej kolumnie był liczbą dodatnią, zaś w każdym wierszu ujemną. Wypełnienie takie jest możliwe, gdy:
   a) $n = 5$ i $m = 4$,
   b) $n = 14$ i $m = 5$,
   c) $n = 12$ i $m = 12$.

6. Punktem stałym funkcji f nazywamy taki argument x_0 należący do dziedziny funkcji, dla którego $f(x_0) = x_0$. Zatem:
   a) funkcja dana wzorem $f(x) = -\frac{1}{x}$ nie ma punktów stałych,
   b) funkcja $g(x) = f\Big(f(x)\Big)$ dla $f(x) = -\frac{1}{x}$ nie ma punktów stałych,
   c) dla pewnej wartości $a \neq 0$ funkcja $g(x) = f\Big(f(x)\Big)$ dla $f(x) = \frac{a}{x}$ nie ma punktów stałych.
7. Wśród wszystkich liczb postaci $3n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest:
   a) nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 5,
   b) nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 6,
   c) nieskończenie wiele liczb pierwszych.
8. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 i $x_1 < x_2$. Ponadto funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, x_1)$, zaś rosnąca w przedziale $(x_2, +\infty)$. Zatem:
   a) $f(x) < 0$ dla dowolnego $x \in (x_1, x_2)$,
   b) funkcja f ma przynajmniej trzy miejsca zerowe,
   c) istnieje taki punkt $x_0 \in (x_1, x_2)$, że funkcja f jest malejąca dla $x \in (x_1, x_0)$ oraz rosnąca dla $x \in (x_0, x_2)$.
9. W finałowym spotkaniu grało sześciu graczy – każdy z każdym. Było dokładnie 5 remisów i po podliczeniu uzyskanych punktów wyłoniono jednego zwycięzcę. Za każdą wygraną partię zawodnik otrzymywał 5 punktów, za remis – 3 punkty, a za przegraną – 0 punktów. Zatem:
   a) każdy z graczy wygrał przynajmniej jedną partię,
   b) każdy z graczy uzyskał inną liczbę punktów,
   c) zwycięzca musiał wygrać przynajmniej dwie partie.
10. Piszemy jedna za drugą kolejne liczby naturalne otrzymując wielocyfrową liczbę naturalną. Wówczas:
    a) jeśli napisana liczba jest najmniejszą liczbą naturalną podzielną przez 11, to ostatnią napisaną przez nas liczbą była liczba 31,
    b) jeśli napisana liczba jest najmniejszą liczbą naturalną podzielną przez 3, to ostatnią napisaną przez nas liczbą była liczba 15,
    c) wśród tak utworzonych liczb wielocyfrowych nie ma liczb podzielnych przez 11.

11. Niech c oznacza długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, zaś h długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną. Wówczas:
    a) jeśli długości wszystkich boków tego trójkąta wyrażają się liczbami wymiernymi, to $2h < c$,
    b) jeśli $2h < c$ oraz h jest liczbą wymierną, to długości wszystkich boków trójkąta są liczbami wymiernymi,
    c) istnieje taki trójkąt prostokątny, w którym $2h \geqslant c$.
12. Dane są liczby postaci $n^4 + 4$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wśród liczb tej postaci:
    a) jest nieskończenie wiele liczb pierwszych,
    b) są przynajmniej dwie liczby pierwsze,
    c) jest nie więcej niż pięć liczb pierwszych.
13. Dany jest taki czworokąt $ABCD$, w którym trójkąty ABD i BCD mają równe pola. Przez O oznaczamy punkt przecięcia się przekątnych tego czworokąta. Wówczas:
    a) trójkąty ACD i ABC też mają równe pola,
    b) przekątne czworokąta $ABCD$ połowią się,
    c) trójkąty OAB i OBC mają równe pola.
14. Dana jest funkcja $f(x) = |x|$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:
    a) $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$,
    b) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$,
    c) $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x - y)|$.
15. Zbiór tych x, które spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} ax - 1 & < & 0 \\ x & > & 4a \end{cases}$$

    jest pusty dla:
    a) $a < 0$,
    b) $a \geqslant \frac{1}{2}$,
    c) $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

16. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - (n-1)x^2 + nx + 2n$, gdzie n jest pewną liczbą pierwszą. Wówczas:

   a) wielomian W ma pierwiastek całkowity dla dowolnej wartości n,

   b) dla dowolnego $n \geqslant 101$ wielomian W ma przynajmniej dwa pierwiastki całkowite,

   c) można tak dobrać wartość n, by wielomian W miał dokładnie dwa różne pierwiastki (w tym jeden dwukrotny).

17. Środki okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie ABC, leżą na tej samej prostej k, przechodzącej przez wierzchołek C tego trójkąta. Oznaczmy miary kątów wewnętrznych tego tójkąta przy wierzchołkach A, B i C odpowiednio przez α, β i γ. Wówczas:

   a) $\alpha = \beta = \gamma$,

   b) $\alpha + \beta = 90°$,

   c) punkt przecięcia się dwusiecznych tego trójkąta leży na prostej k.

18. Równanie $x^3 + px + q = 0$, gdzie $q \neq 0$, ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste. Zatem:

   a) $p \leqslant 0$,

   b) $p < 0$,

   c) $p = 0$.

19. Na okręgu o promieniu r opisany jest romb $ABCD$. Wówczas:

   a) obwód rombu jest co najmniej równy $8r$,

   b) pole rombu jest nie mniejsze niż $\sqrt{2}\pi r^2$,

   c) długości d_1 i d_2 przekątnych rombu spełniają równość $d_1^2 + d_2^2 = 3r^2$.

20. Dana jest funcja $f(x) = \dfrac{x+2}{x+a}$. Zatem:

   a) dla pewnej wartości a funkcja f ma funcję odwrotną,

   b) istnieje taka wartość a, dla której funkcją odwrotną do f jest funkcja f,

   c) istnieje taka wartość a, dla której nie istnieje funkcja odwrotna do funkcji f.