XXVI Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

zestaw **A**

1. Po zwiększeniu ilości boków wielokąta foremnego o 1, liczba jego przekątnych zwiększyła się o pewną liczbę dwucyfrową. Początkowo wielokąt:

   a) mógł mieć mniej niż 12 boków,

   b) musiał mieć ponad 12 boków,

   c) musiał mieć nie więcej niż 34 boki.

2. Dana jest funkcja $f : A \to A$, gdzie $A = (a, b)$ jest niepustym przedziałem zawartym w $\mathbb{R}$, dla którego $|a| < |b|$ i $a \cdot b < 0$. W zbiorze liczb rzeczywistych określamy pewną funkcję g. Wtedy:

   a) jeśli $g(x) = 3f(2x)$, to dziedzina funkcji g musi być podzbiorem właściwym zbioru A,

   b) jeśli $g(x) = f(|x|)$, to dziedziną funkcji g jest zbiór A,

   c) jeśli $g(x) = f(-x)$, to dziedzina funkcji g może być rozłączna ze zbiorem A.

3. Wiadomo, że $k^2 + l^2 + m^2$ jest liczbą podzielną przez 7, gdzie $k, l, m \in \mathbb{C}$. Wówczas:

   a) każda z liczb k, l, m jest podzielna przez 7,

   b) liczba 7 może nie dzielić żadnej z liczb k, l, m,

   c) jeśli liczba k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3, to liczba m lub liczba l przy dzieleniu przez 7 może dawać resztę 4.

4. Liczbę naturalną n przedstawiamy w postaci sumy takich składników naturalnych, aby ich iloczyn był największy. Wówczas:

   a) jeżeli liczba n jest liczbą parzystą, to iloczyn wyznaczonych składników jest też liczbą parzystą,

   b) jeśli $n = 2004$, to wśród wyznaczonych składników więcej jest liczb parzystych niż nieparzystych,

   c) jeśli $n = 11111$, to wśród wyznaczonych składników są tylko liczby nieparzyste.

5. Liczby naturalne dodatnie a, b, c spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$. Zatem:

   a) co najmniej jedna z nich jest parzysta,

   b) co najmniej jedna z nich jest nieparzysta,

   c) żadna z nich może nie być podzielna przez 3.

6. Liczby $1, 2, 3, \ldots, n$ ustawiamy w pewnym porządku i oznaczamy pierwszą z nich przez a_1, drugą przez a_2, ..., n-tą przez a_n. Niech $k = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_n - n|$. Zatem:

   a) jeśli n jest liczbą parzystą, to k także jest liczbą parzystą,

   b) jeśli n jest liczbą nieparzystą, to k także jest liczbą nieparzystą,

   c) k zawsze jest liczbą nieparzystą.

7. Mamy do dyspozycji dwa naczynia o pojemnościach $2 + \sqrt{2}$ i $2 - \sqrt{2}$ litra. Posługując się nimi możemy odmierzyć dokładnie:

   a) 2 litry, 4 litry i $6 + \sqrt{2}$ litra,

   b) 2 litry, $6 - \sqrt{2}$ litra, $6 + \sqrt{2}$ litra,

   c) 8 litrów, $6 - \sqrt{2}$ litra, $6 + \sqrt{2}$ litra.

8. Dany jest n-kąt foremny. Dwie osoby rysują naprzemian takie jego przekątne, które nie przecinają się z żadną narysowaną dotychczas przekątną. Zwycięża ta osoba, która jako ostatnia potrafi narysować taką przekątną.

   a) Jeśli $n = 153$, to istnieje strategia wygrywająca dla zaczynającej osoby.

   b) Jeśli $n = 2004$, to istnieje strategia wygrywająca dla zaczynającej osoby.

   c) Jeśli tylko $n > 8$, to istnieje strategia wygrywająca dla zaczynającej osoby.

9. W zbiorze rozwiązań nierówności $\sqrt{a - |x|} < \dfrac{|x|}{x}$ są:

   a) trzy liczby całkowite dla każdego $a \in (0, 2)$,

   b) dwie liczby całkowite dodatnie dla pewnego $a \in (0, 3)$,

   c) dwie liczby całkowite ujemne dla pewnego $a \in (0, 4)$.

10. Piszemy jedna za drugą kolejne liczby naturalne, przy czym każdą piszemy tyle razy, ile ona jest równa, zaczynając od 1, a kończąc na ostatnim wystąpieniu liczby 100. W tak napisanej liczbie:

    a) najczęściej występuje cyfra 0,

    b) najczęściej występuje cyfra 9,

    c) trójka wystąpi ponad 900 razy.

11. Środki P, Q, R, S boków czworokąta $ABCD$ leżą na pewnym okręgu. Zatem:

    a) czworokąt $PQRS$ jest rombem,

    b) przekątne czworokąra $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym,

    c) czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

12. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą. Zatem funkcja $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$:

   a) może być malejąca,

   b) musi być rosnąca,

   c) może być ograniczona.

13. Ze zbioru wierzchołków sześcianu wybieramy trzy wwierzchołki. Każda taka trójka wierzchołków wyznacza pewien trójkąt. Zatem:

   a) dwa różne takie trójkąty mogą leżeć na płaszczyznach prostopadłych,

   b) jeśli dwa różne takie trójkąty leżą na płaszczyznach równoległych to muszą mieć równa pola,

   c) wszystkich tak wyznaczonych trójkątów prostokątnych jest 48.

14. W pewnym trójkącie długości dwóch wysokości są nie mniejsze od długości boków, na które są opuszczone. Trójkąt ten:

   a) jest trójkątem równoramiennym,

   b) jest trójkątem prostokątnym,

   c) może być trójkątem rozwartokątnym.

15. W dowolnym trójkącie:

   a) suma długości trzech środkowych jest co najmniej taka jak obwód trójkąta,

   b) suma długości dowolnych dwóch wysokości jest zawsze większa od sumy długości dwóch dowolnych środkowych,

   c) połowa sumy długości dwóch boków może być większa od długości środkowej trzeciego boku.

16. Rzut prostokątny sześciokąta foremnego o boku równym 1 na płaszczyznę:

   a) może mieć pole równe 3,

   b) może być pięciokątem,

   c) zawsze zawiera się w pewnym kole o promieniu 1.

17. Dziedziną funkcji nieparzystej f jest zbiór liczb rzeczywistych. Zatem:

   a) $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$,

   b) $|f(x)| < c$ dla wszyskich $x \in \mathbb{R}$ i dla pewnej liczby rzeczywistej c,

   c) jeśli funkcja f jest okresowa, to funkcja $h(x) = \Big(f(x)\Big)^2$ jest funkcją parzystą i okresową.

18. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różnowartościową funkcją spełniającą dla dwolnych $a, b \in \mathbb{R}$ warunek $f(a-b) = f(a) - f(b)$. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Definiujemy ciąg (b_n) wzorem $b_n = f(a_n)$. Zatem:

    a) ciąg (b_n) jest silnie malejącym ciągiem arytmetycznym,

    b) ciąg (b_n) może być ciągiem stałym,

    c) jeśli ciąg (b_n) jest ciągiem stałym, to ciąg (a_n) musi być także ciągiem stałym.

19. Wielomian W ma dokładnie n różnych pierwiatków. Wówczas liczba miejsc zerowych funkcji:

    a) $f(x) = \Big|W(x-a)\Big|$ może dla pewnego a być mniejsza niż n,

    b) $f(x) = W(|x|)$ jest zawsze równa $2n$,

    c) $f(x) = \sqrt{W(x)}$ jest zawsze równa n.

20. Dane jest wyrażenie algebraiczne:
$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1.$$

    a) Wartość tego wyrażenia jest najmniejsza, gdy x jest pewną liczbą niewymierną.

    b) Wartość tego wyrażenia jest najmniejsza dla $x = -4$.

    c) Można wskazać dwie różne wartości x, dla których wyrażenie przyjmuje wartość najmniejszą.