XXV Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i III szkół ponadgimnazjalnych

$\boxed{\text{zestaw } \mathbf{A} \text{ – klasa I}}$

1. Zbiór wszystkich środków okręgów (leżących na jednej płaszczyźnie) przechodzących przez:

   a) dany punkt P jest zawsze całą płaszczyzną.

   b) dwa różne punkty P, Q jest zawsze symetralną odcinka PQ.

   c) trzy różne punkty P, Q, R jest zawsze punktem.

   d) cztery różne punkty P, Q, R, S jest zawsze zbiorem pustym.

2. Wskaż zdania fałszywe:

   a) Z dowolnych pięciu liczb całkowitych można wybrać takie trzy, których suma jest podzielna przez 3.

   b) Dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba naturalna mająca $(p-1)^2$ różnych dzielników.

   c) Istnieją takie trzy liczby pierwsze, których średnia arytmetyczna jest też liczbą pierwszą.

   d) Jeśli suma kilku różnych liczb pierwszych jest parzysta, to ich iloczyn też musi być liczbą parzystą.

3. Niech $S = 1! + 2! + 3! + \ldots + 153!$, gdzie $n!$ – oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n. Wtedy:

   a) cyfrą jedności sumy S jest 3,

   b) cyfrą dziesiątek sumy S jest 2,

   c) cyfra setek sumy S jest równa cyfrze jedności sumy S,

   d) suma S jest podzielna przez 5.

4. W kwadracie $ABCD$ punkty E i F leżą na boku AB, zaś punkt G na boku CD, przy czym $|AE| = |FB| = |CG| = \frac{1}{3}|AB|$. Zatem:

   a) miara kąta GFC jest równa mierze kąta GEC,

   b) miara kąta FCB jest równa mierze kąta EGF,

   c) miara kąta GEF jest równa mierze kąta GCF,

   d) miara kąta ECF jest równa mierze kąta FCB.

5. Liczba sześciocyfrowa $x = \overline{ABCDEF}$ (gdzie $\overline{ABCDEF}$ oznacza zapis dziesiętny tej liczby) jest taką liczbą, że $A + D = B + E = C + F = 9$. Zatem

   a) liczba x musi być podzielna przez 9,

   b) liczba x musi być podzielna przez 11,

   c) liczba x musi być podzielna przez 27,

   d) liczba x musi być podzielna przez 37.

6. Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych dane są cztery różne punkty A, B, C, D o obu współrzędnych całkowitych. Rozważmy środki wszystkich odcinków o końcach w punktach A, B, C i D. Możemy stwierdzić, że:

   a) przy pewnym położeniu punktów A, B, C, D żadna współrzędna żadnego ze środków nie będzie liczbą całkowitą,

   b) przynajmniej dwa punkty spośród środków rozważanych odcinków będą miały zawsze obie współrzęne całkowite,

   c) przynajmniej dwa punkty spośród środków rozważanych odcinków będą miały zawsze obie współrzęne wymierne,

   d) przy dowolnym położeniu punktów A, B, C, D zawsze dokładnie jeden ze środków odcinków będzie miał obydwie współrzędne całkowite.

7. Niech A, B, C będą trzema niewspółliniowymi punktami płaszczyzny.

   a) Trójkąt ABC można podzielić na cztery trójkąty przystające wtedy i tylko wtedy, gdy jest on trójkątem równobocznym.

   b) Trójkąt ABC można podzielić na trójkąty ostrokątne wtedy i tyklo wtedy, gdy jest on trójkątem ostrokątnym.

   c) Trójkąt ABC zawsze można podzielić na sześć trójkątów prostokątnych.

   d) Trójkąt ABC można podzielić na sześć trójkątów prostokątnych wtedy, i tylko gdy jest rtójkątem prostokątnym.

8. W zbiorze funkcji $f_a(x) = ax$ wprowadzamy działanie

$$f_{a_1} \otimes f_{a_2} = h \iff h(x) = (a_1 + a_2)x, \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}$$

   a) działanie to ma element neutralny i jest nim $f_1(x) = x$,

   b) działanie to jest przemienne, ale nie ma elementu neutralnego,

   c) działanie to jest przemienne i łączne,

   d) działanie to nie jest łączne, ale ma element neutralny.

9. Wskaż prawdziwe relacje:

   a) $1 \in \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

   b) $\{1\} \in \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

   c) $\{\{1\}\} \subset \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

   d) $\{1\} \subset \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

10. Liczba $a + \frac{1}{a}$, $a \neq 0$, jest liczbą całkowitą. Zatem:

    a) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ jest liczbą całkowitą,

    b) $a^2 - \frac{1}{a^2}$ jest liczbą całkowitą,

    c) $a^3 + \frac{1}{a^3}$ jest liczbą całkowitą,

    d) można tak dobrać wartość a, by $a^3 + \frac{1}{a^3}$ nie było liczbą całkowitą.

11. Dla każdej liczby rzeczywistej prawdziwa jest równość:

    a) $\sqrt{x^2} = x$,

    b) $\sqrt{|x|^2} = x$,

    c) $\sqrt{|x|^2} = |x|$,

    d) $\sqrt{x^2} = |x|$.

12. Czworościan foremny (bryła zbudowana z czterech trójkątów równobocznych)

    a) nie ma osi symetrii,

    b) ma osie symetrii i są to zawsze proste przechodzące przez dokładnie jeden z wierzchołków czworościanu,

    c) ma osie symetrii i są to proste nie przechodzące przez żaden z wierzchołków czworościanu,

    d) ma dokładnie 3 osie symetrii.

13. Cztery różne proste i okrąg:

    a) mogą podzielić płaszczyznę na 10 części,

    b) mogą podzielić płaszczyznę na dokładnie 9 części,

    c) mogą utworzyć figurę środkowosymetryczną,

    d) mogą przecinać się w 9 różnych punktach.

14. Liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniaja warunek $a^2 + b^2 = c^2$. Zatem

   a) liczby a, b, c muszą być wszystkie liczbami parzystymi,
   b) liczby a, b, c mogą być wszystkie liczbami parzystymi,
   c) liczby a, b, c mogą być wszystkie liczbami nieparzystymi,
   d) co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.

15. Wielokąt wypukły może mieć:

   a) więcej niż trzy kąty ostre,
   b) tyle samo przekątnych co boków,
   c) dwa razy tyle osi symetrii niż boków,
   d) tyle samo przekątnych co osi symetrii.

XXV Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i III szkół ponadgimnazjalnych

zestaw **B** – **klasa I**

1. Niech A, B, C będą trzema niewspółliniowymi punktami płaszczyzny.

   a) Trójkąt ABC można podzielić na 9 trójkątów przystających wtedy i tylko wtedy, gdy jest on trójkątem równobocznym.

   b) Trójkąt ABC można podzielić na trójkąty ostrokątne wtedy i tylko wtedy, gdy jest on trójkątem ostrokątnym.

   c) Trójkąt ABC zawsze można podzielić na siedem trójkątów prostokątnych.

   d) Trójkąt ABC można podzielić na sześć trójkątów prostokątnych, wtedy i tylko wtedy, gdy jest on albo trójkątem prostokątnym, albo równobocznym.

2. W zbiorze funkcji $f_a(x) = ax$ wprowadzamy działanie
   $$f_{a_1} \otimes f_{a_2} = h \Longleftrightarrow h(x) = (a_1 \cdot a_2)x, \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}$$

   a) działanie to ma element neutralny i jest nim $f_1(x) = x$,

   b) działanie to jest przemienne, ale nie ma elementu neutralnego,

   c) działanie to jest przemienne i łączne,

   d) działanie to nie jest łączne, ale ma element neutralny.

3. Wielokąt wypukły może mieć:

   a) więcej niż trzy kąty ostre,

   b) dwa razy tyle przekątnych co boków,

   c) dwa razy tyle osi symetrii co boków,

   d) tyle samo przekątnych co osi symetrii.

4. Zbiór wszystkich środków okręgów (leżących na jednej płaszczyźnie) przechodzących przez:

   a) dany punkt P jest zawsze całą płaszczyzną.

   b) dane dwa różne punkty P, Q jest zawsze symetralną odcinka PQ.

   c) dane trzy różne punkty P, Q, R jest zawsze punktem.

   d) dane cztery różne punkty P, Q, R, S jest zawsze zbiorem pustym.

5. Wskaż zdania prawdziwe:

   a) Istnieją takie trzy liczby pierwsze, których średnia arytmetyczna jest też liczbą pierwszą,

   b) Jeśli suma kilku różnych liczb pierwszych jest nieparzysta, to ich iloczyn też musi być liczbą nieparzystą.

   c) Z dowolnych pięciu liczb całkowitych można wybrać takie trzy, których suma jest podzielna przez 4.

   d) Dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba naturalna mająca $(p+1)^3$ różnych dzielników.

6. Cztery różne proste i okrąg:

   a) mogą podzielić płaszczyznę na 10 części,

   b) mogą podzielić płaszczyznę na dokładnie 9 części,

   c) mogą utworzyć figurę środkowosymetryczną,

   d) mogą przecinać się w 9 różnych punktach.

7. Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych dane są cztery różne punkty A, B, C, D o obu współrzędnych całkowitych. Rozważmy środki wszystkich odcinków o końcach w punktach A, B, C i D. Możemy stwierdzić, że:

   a) przy pewnym położeniu punktów A, B, C, D żadna współrzędna żadnego ze środków nie będzie liczbą całkowitą,

   b) przynajmniej dwa punkty spośród środków rozważanych odcinków będą miały zawsze obie współrzęne całkowite,

   c) przynajmniej dwa punkty spośród środków rozważanych odcinków będą miały choć jedną całkowita współrzędną,

   d) przy dowolnym położeniu punktów A, B, C, D zawsze dokładnie jeden ze środków odcinków będzie miał obydwie współrzędne całkowite.

8. Wskaż relacje fałszywe:

   a) $1 \in \Big\{\{1, 2\}, \{1\}\Big\}$

   b) $\{1\} \in \Big\{\{1, 2\}, \{1\}\Big\}$

   c) $\{\{1\}\} \subset \Big\{\{1, 2\}, \{1\}\Big\}$

   d) $\{1\} \subset \Big\{\{1, 2\}, \{1\}\Big\}$

9. Liczba $a + \frac{1}{a}$, $a \neq 0$, jest liczbą całkowitą. Zatem:

   a) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ musi być liczbą całkowitą,

   b) $a^2 - \frac{1}{a^2}$ może być liczbą całkowitą (dla pewnej wartości $a \in \mathbf{R}$),

   c) $a^3 + \frac{1}{a^3}$ może być liczbą całkowitą (dla pewnej wartości $a \in \mathbf{R}$),

   d) można tak dobrać wartość a, by $a^3 + \frac{1}{a^3}$ nie było liczbą całkowitą.

10. W kwadracie $ABCD$ punkty E i F leżą na boku AB, zaś punkt G na boku CD, przy czym $|AE| = |FB| = |CG| = \frac{1}{3}|AB|$. Zatem:

    a) miara kąta GEF jest równa mierze kąta GCF,

    b) miara kąta GFC jest równa mierze kąta GEC,

    c) miara kąta FCB jest równa mierze kąta EGF,

    d) miara kąta ECF jest równa mierze kąta FCB.

11. Dla każdej liczby rzeczywistej prawdziwa jest równość:

    a) $\sqrt{x^2} = x$,

    b) $\sqrt{|x|^2} = x$,

    c) $\sqrt{|x|^2} = |x|$,

    d) $\sqrt{x^2} = |x|$.

12. Liczba sześciocyfrowa $x = \overline{ABCDEF}$ (gdzie $\overline{ABCDEF}$ oznacza zapis dziesiętny tej liczby) jest taką liczbą, że $A + D = B + E = C + F = 9$. Zatem

    a) liczba x musi być podzielna przez 11,

    b) liczba x musi być podzielna przez 27,

    c) liczba x musi być podzielna przez 33,

    d) liczba x musi być podzielna przez 37.

13. Liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniaja warunek $a^2 + b^2 = c^2$. Zatem

    a) liczby a, b, c muszą być wszystkie liczbami parzystymi,

    b) liczby a, b, c mogą być wszystkie liczbami parzystymi,

    c) liczby a, b, c mogą być wszystkie liczbami nieparzystymi,

    d) co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.

14. Czworościan foremny (bryła zbudowana z czterech trójkątów równobocznych)

    a) nie ma osi symetrii,

    b) ma osie symetrii i są to zawsze proste przechodzące przez dokładnie jeden z wierzchołków czworościanu,

    c) ma osie symetrii i są to proste nie przechodzące przez żaden z wierzchołków czworościanu,

    d) ma dokładnie 3 osie symetrii.

15. Niech $S = 1! + 2! + 3! + \ldots + 132!$, gdzie $n!$ – oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n. Wtedy:

    a) cyfrą jedności sumy S jest 3,

    b) cyfrą dziesiątek sumy S jest 1,

    c) cyfra setek sumy S jest równa cyfrze jedności sumy S,

    d) suma S jest podzielna przez 10.

XXV Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i III szkół ponadgimnazjalnych

zestaw **A** – klasa III

1. W zbiorze funkcji $f_a(x) = ax^2$ wprowadzamy działanie
$$f_{a_1} \otimes f_{a_2} = h \Longleftrightarrow h(x) = (a_1 + a_2)x^2, \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}$$

   a) działanie to ma element neutralny i jest nim $f_1(x) = x^2$,

   b) działanie to jest przemienne, ale nie ma elementu neutralnego,

   c) działanie to jest przemienne i łączne,

   d) działanie to nie jest łączne, ale ma element neutralny.

2. Wskaż prawdziwe relacje:

   a) $1 \in \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

   b) $\{1\} \in \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

   c) $\{1\} \subset \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

   d) $\{\{1\}\} \subset \Big\{\{1,2\},\{1\}\Big\}$

3. Niech $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx-1}$, $\quad (x \neq \frac{1}{b})$.

   a) Dla dowolnych wartości parametrów a i b wykresem funkcji f jest hiperbola.

   b) $\bigvee_{a,b \in \mathbf{R}} \bigwedge_{x \in \mathbf{R} \setminus \{-b\}} \quad f(f(x)) = x$.

   c) Można tak dobrać wartości a i b, aby wykres funkcji f nie miał punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych.

   d) Przy pewnych wartościach a i b funkcja f jest funkcją silnie malejącą dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{-b\}$.

4. Istnieje wielomian W o współczynnikach całkowitych, dla którego zachodzą równości:

   a) $W(7) = 11$ i $W(11) = 13$,

   b) $W(1) = 6$ i $W(7) = 9$,

   c) $W(1) = 4$ i $W(3) = 22$,

   d) $W(5) = 9$ i $W(9) = 7$.

5. Niech h_1, h_2, h_3 będą wysokościami pewnego trójkąta, r - promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, zaś R - promieniem okręgu na nim opisanego. Wtedy:

   a) $r + R = \frac{h_1+h_2+h_3}{3}$,

   b) jeśli trójkąt jest prostokątny, to
   $r + R = \frac{h_1+h_2}{2}$ lub $r + R = \frac{h_2+h_3}{2}$ lub $r + R = \frac{h_3+h_1}{2}$,

   c) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$,

   d) $R = \frac{2P^2}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}$, gdzie P oznacza pole tego trójkąta.

6. Funkcja f jest nieparzysta i okresowa. Zatem

   a) f musi być ograniczona,

   b) f nie może być funkcją stałą,

   c) funkcja $g(x) = \Big(f(x)\Big)^2$ jest funkcją parzystą i okresową,

   d) okres funkcji f fest również okresem funkcji $h(x) = a\Big(f(ax)\Big)$,

7. Układ:
   $$\begin{cases} xy &= a^2 \\ x^2 + y^2 &= b^2 \end{cases}$$
   może w zależności od wartości parametrów $a, b \in \mathbf{R}$

   a) nie mieć rozwiązań,

   b) mieć dokładnie jedno rozwiązanie,

   c) mieć dokładnie dwa rozwiązania,

   d) mieć więcej niż dwa rozwiązania.

8. Wiadomo, że żadna z liczb $a, b, c \in \mathbf{C}$ nie jest podzielna przez 8. Wówczas:

   a) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ jest podzielny przez 8,

   b) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ jest podzielny przez 24,

   c) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ jest podzielny przez 8,

   d) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$ jest podzielny przez 3.

9. Równanie (z niewiadomą x):

$$2|x+6| - a + |x-6| = |x|$$

a) dla pewnej wartości a ma nieskończenie wiele rozwiązań,

b) dla pewnej wartości a ma 3 rozwiązania,

c) ma zawsze co najwyżej 2 rozwiązania,

d) dla $a > 6$ ma jedno rozwiązanie.

10. Istnieje funkcja $f : A \to B$ różnowatrościowa i „na" zbiór, gdy:

a) $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $B = \mathbf{R}$,

b) A jest zbiorem liczb naturalnych, zaś B- zbiorem liczb naturalnych parzystych,

c) A jest zbiorem liczb całkowitych, zaś B- zbiorem liczb rzeczywistych,

d) $A =< 0, 1)$, $B = (0, 1)$.

11. Różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych może być liczbą postaci:

a) $6k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{C}$,

b) $4k$, gdzie $k \in \mathbf{C}$,

c) $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{C}$,

d) $2k + 5$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

12. W zbiorze liczb całkowitych nie ma rozwiązań równanie:

a) $5x^2 + 2 = 6y^2$,

b) $3x^2 - 4y^2 = 13$,

c) $x^2 + y^2 = 5z^2$,

d) $x^2 - 3y = 17$.

13. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym. Zatem

a) ciąg $(a_n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym,

b) ciąg $(a_n + n)_{n \in \mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym,

c) ciąg $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym,

d) ciąg $(a_n + a_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym.

14. Pewna funkcja jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmuje tylko skończoną ilość wartości. Zatem funkcja ta:

    a) może być funkcją okresową,
    b) może być funkcją stałą,
    c) może być funkcją niemalejącą,
    d) musi być funkcja okresową.

15. Dwudzietsościan foremny (bryła zbudowana z 20 trójkątów równobocznych):

    a) ma 30 krawędzi i tyle samo osi symetrii,
    b) ma 12 wierzchołków i tyle samo osi symetrii,
    c) ma dokładnie 36 różnych przekątnych,
    d) nie ma osi symetrii.

XXV Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i III szkół ponadgimnazjalnych

zestaw **B** – **klasa III**

1. Wiadomo, że żadna z liczb $a, b, c \in \mathbf{C}$ nie jest podzielna przez 5. Wówczas:

   a) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ jest podzielny przez 5,

   b) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$ jest podzielny przez 2,

   c) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ jest podzielny przez 10 ,

   d) iloczyn $(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$ jest podzielny przez 10.

2. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym. Zatem

   a) ciąg $(a_n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym,

   b) ciąg $(a_n - n)_{n\in\mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym,

   c) ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym,

   d) ciąg $(a_n + a_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ jest ciągiem monotonicznym.

3. Układ:
   $$\begin{cases} xy &= a^2 \\ x^2 + y^2 &= b^2 \end{cases}$$
   może w zależności od wartości parametrów $a, b \in \mathbf{R}$

   a) nie mieć rozwiązań,

   b) mieć dokładnie dwa rozwiązanie,

   c) mieć dokładnie trzy rozwiązania,

   d) mieć więcej niż trzy rozwiązania.

4. W zbiorze liczb całkowitych nie ma rozwiązań równanie:

   a) $7x^2 + 8 = y^2$,

   b) $3x^2 - 4y^2 = 11$,

   c) $4x^2 - 2y^2 = 17z^2$,

   d) $x^2 - 3y = 7$.

5. Niech $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx-1}, \quad (x \neq \frac{1}{b})$.

   a) Można tak dobrać wartości parametrów a i b, by wykresem funkcji f nie była hiperbola.

   b) $\bigvee_{a,b \in \mathbf{R}} \quad \bigwedge_{x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{b}\}} \quad f(f(x)) = x.$

   c) Można tak dobrać wartości a i b, aby wykres funkcji f nie miał punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych.

   d) Przy pewnych wartościach a i b funkcja f jest funkcją silnie rosnącą dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{b}\}$.

6. Istnieje wielomian W o współczynnikach całkowitych, dla którego zachodzą równości:

   a) $W(5) = 9$ i $W(9) = 7$,

   b) $W(2) = 5$ i $W(5) = 6$,

   c) $W(1) = 6$ i $W(3) = 22$,

   d) $W(5) = 9$ i $W(9) = 9$.

7. Niech h_1, h_2, h_3 będą wysokościami pewnego trójkąta, r - promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, zaś R - promieniem okręgu na nim opisanego. Wtedy:

   a) $R = \frac{2P^2}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}$, gdzie P oznacza pole tego trójkąta,

   b) $r + R = \frac{h_1+h_2+h_3}{3}$,

   c) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$,

   d) jeśli trójkąt ten jest trójkątem prostokątnym, to
   $r + R = \frac{h_1+h_2}{2}$ lub $r + R = \frac{h_2+h_3}{2}$ lub $r + R = \frac{h_3+h_1}{2}$.

8. Funkcja f jest nieparzysta i okresowa. Zatem

   a) f musi być ograniczona,

   b) f nie może być funkcją parzystą,

   c) funkcja $g(x) = \Big(f(x)\Big)^2$ jest funkcją parzystą i okresową,

   d) okres funkcji f jest również okresem funkcji $h(x) = a\Big(f(ax)\Big)$, dla $a > 1$.

9. Dwudziestościan foremny (bryła zbudowana z 20 trójkątów równobocznych):
   a) ma 30 krawędzi i tyle samo osi symetrii,
   b) ma 12 wierzchołków i tyle samo osi symetrii,
   c) ma dokładnie 36 różnych przekątnych,
   d) ma więcej osi symetrii niż krawędzi.
10. W zbiorze funkcji $f_a(x) = ax^2$ wprowadzamy działanie
$$f_{a_1} \otimes f_{a_2} = h \Longleftrightarrow h(x) = (a_1 \cdot a_2)x^2, \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}$$
   a) działanie to ma element neutralny i jest nim $f_1(x) = x^2$,
   b) działanie to jest przemienne, ale nie ma elementu neutralnego,
   c) działanie to jest przemienne i łączne,
   d) działanie to nie jest łączne, ale ma element neutralny.
11. Równanie (z niewiadomą x):
$$2|x+2| + a + |x| = 3|x-2|$$
   a) dla pewnej wartości a ma nieskończenie wiele rozwiązań,
   b) dla pewnej wartości a ma 3 rozwiązania,
   c) ma zawsze co najwyżej 2 rozwiązania,
   d) dla $a > 2$ ma jedno rozwiązanie.
12. Istnieje funkcja $f : A \to B$ różnowatrościowa i „na" zbiór, gdy:
   a) $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $B = \mathbf{R}$,
   b) A jest zbiorem liczb naturalnych, zaś B- zbiorem liczb naturalnych nieparzystych,
   c) A jest zbiorem liczb naturalnych, zaś B- zbiorem liczb rzeczywistych,
   d) $A = (0, 1 >$, $B =< 0, 1 >$.
13. Różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych może być liczbą postaci:
   a) $2k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{C}$,
   b) $4k + 5$, gdzie $k \in \mathbf{C}$,
   c) $6k + 3$, gdzie $k \in \mathbf{C}$,
   d) $6k$, gdzie $k \in \mathbf{C}$.

14. Wskaż prawdziwe relacje:

   a) $a \in \Big\{\{a,b\},\{a\}\Big\}$

   b) $\{a\} \in \Big\{\{a,b\},\{a\}\Big\}$

   c) $\{a\} \subset \Big\{\{a,b\},\{a\}\Big\}$

   d) $\{\{a\}\} \subset \Big\{\{a,b\},\{a\}\Big\}$

15. Pewna funkcja jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmuje tylko skończoną ilość wartości. Zatem funkcja ta:

   a) może być funkcją okresową,

   b) może być funkcją nierosnącą,

   c) może być funkcją liniową,

   d) musi być funkcją okresową.