XXIX Rozkosze Łamania Głowy

konkurs matematyczny dla klas I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Niech p i q będą zdaniami. W zdaniu:

   $$(\star) \qquad (\sim p \vee q) \Rightarrow (p \boxed{?}\, q)$$

   brakuje spójnika. Do dyspozycji mamy cztery spójniki: $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Wtedy:

   a) spośród tych czterech spójników można wybrać i wstawić w miejsce znaku zapytania taki spójnkik, że zdanie $(\star)$ będzie tautologią,

   b) spośród tych czterech spójników można wybrać i wstawić w miejsce znaku zapytania taki spójnik, że dla każdych wartości zdań p i q zdanie $(\star)$ będzie zdaniem fałszywym,

   c) jeśli jedno ze zdań p i q jest fałszywe, zaś drugie prawdziwe, to bez względu na wybór spójnika zdanie $(\star)$ będzie zdaniem fałszywym.

2. W układzie współrzędnych zaznaczamy zbiory

   $$P_a = \Big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge \Big||x| - |y|\Big| = a\Big\}.$$

   Wówczas:

   a) istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, dla których $P_a = P_b$,

   b) jeśli $a > 3$, to zbiór P_a ma z prostą $y = x + 2$ dokładnie dwa punkty wspólne,

   c) można tak dobrać wartość a, aby $P_a \cap F = F$,
   gdzie $F = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge y = |x| + 2\}$.

3. Liczby całkowite dodatnie x, y, z spełniają warunek $x^2 + y^2 = z^2$. Zatem przynajmniej jedna z nich

   a) jest parzysta,

   b) jest nieparzysta,

   c) jest podzielna przez 3.

4. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiadomo, że jest funkcją nieparzystą. Wówczas:

   a) jeśli f jest funkcją rosnącą w $\mathbb{R}_+$, to jest rosnąca również w $\mathbb{R}_-$,

   b) jeśli f jest funkcją malejącą w $\mathbb{R}_+$, to jest malejąca w całej swojej dziedzinie.

   c) funkca f może być funkcją parzystą.

5. Liczba $a^3 + b^3 + c^3$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ jest podzielna przez 6. Zatem:

   a) suma $a + b + c$ jest liczbą parzystą,

   b) suma $a + b + c$ też jest liczbą podzielną przez 6,

   c) przynajmniej jedna z liczb a, b, c jest podzielna przez 3.

6. Dane jest równanie $x^2 + 2p|x| + q = 0.$

   a) Dla pewnej wartości $p > 0$ równanie może mieć cztery różne rozwiązania.

   b) Jeśli $p^2 > q$ i $pq > 0$, to równanie może mieć cztery różne rozwiązania.

   c) Jeśli liczby p i q są różnych znaków, to równanie może mieć dokładnie dwa różne rozwiązania.

7. Niech h_1 i h_2 będą wysokościami trójkąta, zaś r – długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wtedy:

   a) $\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$,

   b) $\frac{1}{2r}$ może być równe sumie $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$,

   c) $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r}$.

8. Dany jest prostopadłościan, w którym suma wszystkich jego krawędzi jest równa $4p$, a jego pole powierzchni całkowitej wynosi $2q$. Wtedy:

   a) można tak dobrać wymiary prostopadłościanu, by $p^2 = 3q$,

   b) można tak dobrać wymiary prostopadłościanu, by $p^2 < 3q$,

   c) można tak dobrać wymiary prostopadłościanu, by $p^2 > 3q$.

9. W przestrzeni dane są cztery różne punkty A_1, A_2, A_3, A_4. Niech $\mathbf{Z}$ oznacza zbiór tych punktów przestrzeni, które są równoodległe od wszystkich punktów A_1, A_2, A_3, A_4 tzn.:

$$\mathbf{Z}=\{X : |XA_1| = |XA_2| = |XA_3| = |XA_4|\}.$$

   Wówczas:

   a) jeśli A_1, A_2, A_3, A_4 nie leżą w jednej płaszczyźnie, to $\mathbf{Z}$ jest zawsze zbiorem jednopunktowym,

   b) jeśli punkty A_1, A_2, A_3, A_4 leżą w jednej płaszczyźnie, to w zbiorze $\mathbf{Z}$ jest skończona liczba punktów,

   c) jeśli punkty A_1, A_2, A_3, A_4 leżą w jednej płaszczyźnie to zbiór $\mathbf{Z}$ może być zbiorem jednoelementowym.

10. Funkcja f, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym pewnej liczbie całkowitej. Zatem:

   a) funkcja $g(x) = f(x) + \pi$ nie jest funkcją okresową,

   b) funkcja $g(x) = f(x + \pi)$ jest funkcją okresową o niewymiernym okresie podstawowym,

   c) jeśli funkcja f jest funkcją nieparzystą, to funkcja $h(x) = \Big(f(x)\Big)^2$ jest parzystą funkcją okresową.

11. Szukamy liczb pierwszych p, q, r spełniających równanie
$$p + q + r = pq + 1.$$

   a) Istnieją co najmniej trzy trójki (p, q, r) spełniające powyższe równanie.

   b) Istnieje dokładnie jedna trójka (p, q, r) spełniająca powyższe równanie, w której $p > 13$.

   c) Istnieją dokładnie dwie trójki (p, q, r) spełniające równanie.

12. Trzy okręgi o promieniach długości 1, 2 i 3 są parami zewnętrznie styczne. Okrąg wyznaczony przez ich punkty styczności ma średnicę:

   a) długości 1,

   b) długości co najwyżej 2,

   c) długości co najmniej 2.

13. W pewnym turnieju, w którym każdy grał z każdym jeden raz, uczestniczyli zawodnicy z dwóch grup: $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Po zakończeniu turnieju okazało się, że każdy zawodnik połowę uzyskanych punktów zdobył w grach z zawodnikami z grupy $\mathbf{B}$. Za zwycięstwo zawodnik otrzymywał 1 punkt, za przegraną – 0 punktów (sytuacji remisowych nie było). Oznacza to, że liczba zawodników w turnieju:

   a) musiała być liczbą parzystą,

   b) mogła być liczbą nieparzystą,

   c) musiała być kwadratem liczby naturalnej.

14. Dane są zbiory X–pięcioelementowy, Y–trzyelementowy, Z–sześcioelementowy i T–dwuelementowy. Wówczas:

   a) funkcji ze zbioru X na zbiór Y jest więcej niż funkcji ze zbioru Z na zbiór T,

   b) funkcji ze zbioru X w zbiór Y jest więcej niż funkcji ze zbioru Z w zbiór T,

   c) funkcji ze zbioru X w zbiór Y jest więcej niż funkcji ze zbioru Y w zbiór X.

15. Poruszamy się wieżą szachową (tzn. poruszamy się poziomo lub pionowo, nigdy za ukos) z lewego dolnego rogu szachownicy 8×8 do prawego górnego. Przyjmijmy, że długość boku jednego pola szachownicy wynosi 1. Wówczas:
    a) najkrótsza droga ma długość 14,
    b) ilość różnych (różniących się choć na jednym odcinku) najkrótszych dróg to 64,
    c) jeżeli wieża na każdym polu szachownicy może być tylko jeden raz, to najdłuższa możliwa droga ma długość 63.
16. Dane jest równanie $\cos(x-1) = x^2 - 2x + 2$. Wówczas:
    a) równanie ma tylko jedno rozwiązanie,
    b) równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań,
    c) rozwiązaniem równania jest pewna liczba $x \in < -\pi, \pi >$.
17. Dane są nieskończone ciągi arytmetyczne $(3; 7; 11; \ldots)$ oraz $(7; 12; 17; \ldots)$. Wówczas:
    a) liczba 1001 występuje w obu ciągach,
    b) liczba 2007 występuje w obu ciągach,
    c) nieskończenie wiele liczb występuje w obu ciągach.
18. Niech $W(x) = x^3 + px + q$, gdzie $q \neq 0$. Wtedy:
    a) jeśli wielomian W ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $p > 0$,
    b) jeśli wielomian W ma pierwiastek rzeczywisty dwukrotny, to $4p^3 = 27q^2$,
    c) jeśli wielomian W ma pierwiastek rzeczywisty dwukrotny, to $4p^3 + 27q^2$ może być liczbą ujemną.
19. Zbiór rozwiązań układu nierówności: $\begin{cases} y - |x^2 - 2x| \geqslant 0 \\ y + |x - 1| \leqslant 0 \end{cases}$ gdzie $x, y \in \mathbf{C}$ jest:
    a) dwuelementowy,
    b) sześcioelementowy,
    c) ma nieskończenie wiele elementów.
20. Nieskończony, rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich, którego każde dwa wyrazy są względnie pierwsze, może:
    a) być ciągiem arytmetycznym,
    b) być ciągiem geometrycznym,
    c) zawierać trzy kolejne liczby naturalne.