XL Regionalny Konkurs

Rozkosze łamania Głowy

klasy I i II szkół ponadgimnazjalnych

1. Wiadomo, że liczby $7a$ oraz $6a+1$ są całkowite. Zatem:

A. a jest liczbą całkowią

B. $a-1$ jest liczbą całkowią

C. $a+1$ jest liczbą całkowią

2. Wiadomo, że $1 < a < b$ Wówczas:

A. $\frac{a}{a-1} < \frac{b}{b-1}$

B. $\frac{a}{a-1} = \frac{b}{b-1}$

C. $\frac{a}{a-1} > \frac{b}{b-1}$

3. Punkty P i R są środkami boków BC i CD równoległoboku $ABCD$ o polu równym S. Punkty K i L są punktami wspólnymi przekątnej BD z prostymi AP i AR.

A. Pole pięciokąta $LKPCR$ wynosi nie więcej niż $\frac{2}{5}S$.

B. Pole pięciokąta $LKPCR$ wynosi co najmniej $\frac{\sqrt{10}}{10}S$.

C. Pole trójkąta AKL jest równe sumie pól trójkątów KBP i LRD.

4. Liczby a i b są podzielne przez 7. Wówczas liczba:

A. $a \cdot b$ jest podzielna przez 49

B. $a \cdot (a-b)$ jest podzielna przez 49

C. $(a^2+a+1)-(b^2-b+1)$ jest podzielna przez 49

5. Szukamy takich liczb całkowitych n, by liczba $2^{4n+2}+1$ była liczbą pierwszą. Zatem

A. n nie może być liczbą ujemną

B. n musi być liczbą większą niż 2

C. dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n liczba $2^{4n+2}+1$ jest liczbą złożoną

6. Deltoid o bokach 6 i 10 wpisany jest w okrąg. Zatem

A. średnica okręgu jest równa 8

B. długość co najmniej jednej przekątnej deltoidu jest liczbą wymierną

C. pole deltoidu wynosi 60.

7. Niech p oznacza liczbę pierwszą. Rozważmy liczbę $w = p^2 + 3p + k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wówczas:

A. istnieje taka wartość k, dla której w zawsze jest liczbą pierwszą,

B. jeśli $p = 2$ to istnieją dokładnie cztery wartości $k < 10$ dla których w jest liczbą pierwszą,

C. jeśli $p = 2$ to dla dokładnie pięciu wartości $10 \leqslant k < 100$ wartość w jest liczbą pierwszą.

8. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt P jest punktem przecięcia wysokości AA_1, BB_1, CC_1 tego trójkąta. Wiadomo ponadto, że $AB = CP$. Wówczas:

A. trójkąty $\triangle BCC_1$ i $\triangle ABA_1$ są podobne,

B. $A_1B = A_1P$,

C. $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CA_1A|$.

9. 2018 punktów leżących na jednym okręgu pokolorowano na jeden z trzech różnych kolorów. Każdego koloru użyto co najmniej raz. Wówczas zawsze można narysować $n-$kąt o jednokolorowych wierzchołkach w tych punktach dla:

A. $n = 2016$

B. $674 \leqslant n < 2016$

C. $273 \leqslant n < 674$

10. Rozważmy wszystkie funkcje określone w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, dla których równość $f(f(x)) = x$ spełniona jest dla wszystkich $x \in (0, +\infty)$. Zatem:

A. jedyną funkcją spełniającą zadaną równość jest funkcja dana wzorem $f(x) = x$

B. są dokładnie dwie takie funkcje

C. są co najmniej trzy takie funkcje

11. Każda środkowa pewnego trójkąta ABC jest krótsza od każdego z boków tego trójkąta. Wówczas:

A. trójkąt ABC może być rozwartokątny

B. trójkąt ABC może być prostokątny

C. trójkąt ABC może być ostrokątny

12. Liczby naturalne od 2 do 100 zapisano jedna za drugą, tworząc wielocyfrową liczbę naturalną m. Suma cyfr liczby m jest

A. większa niż 500,

B. większa niż 1000,

C. mniejsza niż 1000

13. W trapezie prostokątnym o obwodzie 16, długość każdego z boków jest liczbą naturalną. Najkrótszy z boków:

A. może być wysokością tego trapezu,

B. może mieć długość 3,

C. musi mieć długość 2.

14. Prawdziwa jest nierówność:

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$, gdzie $a, b > 0$

B. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a + b + c)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$

C. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$, gdzie $a, b, c > 0$

15. Wiadomo, że liczba rzeczywista $z = \dfrac{|x| + y}{y - \Big|1 - |x|\Big|}$ jest liczbą wymierną, gdzie $y \neq \Big|1 - |x|\Big|$. Wynika stąd, że:

A. przynajmniej jedna z liczb x, y jest liczbą wymierną

B. liczba z jest zawsze liczbą większą od $\sqrt{2}$

C. dla pewnych x, y liczba z jest liczbą pierwszą

16. Równanie $x^2 - px - q = 0$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi

A. musi mieć pierwiastek dodatni

B. może mieć pierwiastek będący liczbą pierwszą

C. może mieć pierwiastek będący liczbą całkowitą ujemną

17. Spośród liczb $3, 4, 5, ..., 899, 900$ losujemy n liczb.

A. Jeśli suma żadnych dwóch z nich nie dzieli się przez trzy, to n musi być liczbą mniejszą niż 300.

B. Jeśli suma żadnych dwóch z nich nie dzieli się przez pięć, to n może być liczbą większą niż 360.

C. Jeśli suma żadnych trzech z nich nie dzieli się przez trzy, to $n < 4$.

18. Każda z dwóch funkcji kwadratowych

$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \qquad f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

ma dwa miejsca zerowe.
Definiujemy funkcję f wzorem $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Wówczas:

A. funkcja f ma nie więcej niż dwa miejsca zerowe

B. funkcja f może mieć dokładnie jedno miejsce zerowe

C. funkcja f może nie mieć miejsc zerowych

19. Ze zbioru wierzchołków sześcianu wybieramy trzy wierzchołki. Każda taka trójka wierzchołków wyznacza pewien trójkąt. Zatem:

A. dwa różne takie trójkąty mogą leżeć na płaszczyznach prostopadłych

B. jeśli dwa różne takie trójkąty mają równa pola, to leżą na płaszczyznach równoległych lub prostopadłych

C. wszystkich tak wyznaczonych trójkątów prostokątnych jest 42.

20. Dane jest wyrażenie algebraiczne $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

A. Wyrażenie przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne.

B. Wartość tego wyrażenia jest najmniejsza, gdy x jest pewną liczbą niewymierną.

C. Dla pewnej wartości x wartość wyrażenia jest liczbą podzielną przez 11.